MODELO MATEMÁTICO PRESA-PREDADOR LOTKA-VOLTERRA NO CONTROLE DE PRAGAS DA CANA DE AÇÚCAR

I. JESUS[1], A. D. LIMA[2]

[1,2] Universidade de Uberaba, Departamento de Engenharia Química

RESUMO – *Pretende - se neste trabalho apresentar o um modelo matemático que visa a estabilidade e controle de pragas em uma cultura, para tal pesquisou-se o modelo presa-predador, tendo em vista o controle biológico da cana de açúcar. Este modelo é denominado Lotka-Volterra, o mesmo consiste em analisar e descrever dinâmicas nos princípios biológicos por meio de sistemas de duas equações diferenciais, não lineares e de primeira ordem, em torno da situação de equilíbrio, o qual, tem sido utilizado em processos agroindustriais, porém de uma forma complexa, por essa razão está sendo apresentado, de uma forma didática, para pesquisadores de áreas multidisciplinares, com o objetivo principal de proporcionar o acesso e entendimento de todos.*

1. INTRODUÇÃO

A cana-de-açúcar é considerada uma das mais importantes culturas do mundo, que predomina em regiões com climas tropicais e semitropicais (GARCIA, 2015). Reconhecida no mundo por servir de matéria prima, produção de açúcar e etanol, a cultura gera fonte de renda, empregos e desenvolvimento (OLIVEIRA FILHO, 2014).

O setor sucroalcooleiro tem atingido um desenvolvimento na agricultura brasileira, fazendo parte do cenário da agroenergia produzindo açúcar, combustível e energia (GOES, 2008). O Brasil é maior produtor de cana-de-açúcar do mundo, o território brasileiro tem 851.10^6 ha, desses $6,6.10^6$ ha estão ocupados pela cana-de-açúcar correspondendo a 0,78% da área do país (MORAES, 2007).

A cana-de-açúcar é afetada pela Diatraea saccharalis, a broca do colmo, considerada uma das principais pragas da cultura de cana, é conhecida por reduzir significativamente a produtividade em campo e a qualidade da matéria prima (DINARDO-MIRANDA et al., 2013), causando uma série de danos econômicos aos produtores (PORTELA et al., 2011). A atuação da praga gera inúmeras falhas na germinação, morte das gemas e perda de peso diminuindo a pureza (PORTELA et al., 2010).

Para otimizar a qualidade do produto, aumentando a produtividade e a rentabilidade tem se utilizado diversas formas de manejo para o controle da praga e o aprimoramento dos programas de controle por meio de novas técnicas e ferramentas (FREIRE et al., 2005).

O momento para praticar o controle da praga é estudado pela intensidade de infestação dado por:

$$Intensidade\ de\ Infestação\ (IF) = \frac{100 * (número\ de\ internódios\ broqueados)}{número\ total\ de\ internódios}$$

Os dados são obtidos após coletar 100 colmos de cana por talhão, ao acaso, e abrindo de forma longitudinal cada colmo contando-se o número de colmos broqueados. Após contar o número total de internódios e aqueles que se encontram lesionados devido ao ataque da broca, deve se determinar IF, se $IF \geq 3\%$(ou seja, maior ou igual a 3%) irá implicar que é época ideal de controle (GALLO, 2002).

Para este trabalho, será estudado um modelo matemático para o controle biológico da *Diatraea saccharalis* pela parasitóide de lagartas, utilizando a vespinha *Cotesia flavipes*. Objetiva-se apresentar o modelo populacional do tipo Lotka-Volterra aplicado na cultura de cana de açúcar, através da interação entre a população da Diatraea saccharalis, a broca do colmo (broca da cana), presa, e a vespa *Cotesia flavipes*, predador.

2. PRAGAS DAS PLANTAS

São mais de 1 milhão de espécies de insetos pelo mundo, desses cerca de 10% são considerados pragas que de alguma forma prejudicam plantas, animais e o homem. Segundo o departamento de Agricultura dos EUA (USDA), são coletadas e classificadas cerca de 5000 novas espécies por ano, os insetos podem causar danos diretos ou indiretos atacando estruturas vegetais, como folhas e raízes alterando e provocando reflexos na produção, podendo também transmitir patógenos, especialmente vírus, facilitando a proliferação de bactérias e desenvolvimento de fungos (GALLO, 2002).

Prejuízos causados por pragas, doenças e plantas daninhas são elevados e, chegam a causar perdas na ordem de 38%, conforme tabela 1.

Cultura	Perdas (%)			
	Pragas	Doenças	Plantas daninhas	Total
Trigo	5	10	10	25
Aveia	7	10	10	27
Centeio	2	3	10	15
Cevada	4	8	9	21
Arroz	28	9	10	47
Painço e sorgo	10	10	18	38
Milho	13	10	13	36
Batata	6	22	4	32
Beterraba	8	10	6	24
Cana-de-açúcar	20	19	15	54
Hortaliças	8	12	8	28
Plantas frutíferas	7	14	3	24
Videira	3	22	10	35
Café	13	17	15	45
Cacau	13	21	12	46
Chá	8	15	9	32
Fumo	10	13	8	31
Lúpulo	8	8	6	22
Oliveira	18	8	10	36

Coqueiro	12	7	9	28
Soja	5	11	13	29
Amendoim	18	11	11	40
Algodão	13	10	5	28
Linhaça	3	7	9	19
Colza	13	7	11	31
Gengerlim	13	3	10	26
Copra	15	19	10	44
Outras plantas fibrosas	5	8	10	23
Seringueira	5	15	3	25
Média	13	14	11	38

Tabela 1: Perdas (%) mundiais de produção, por ano, por ataque de pragas, doenças e plantas daninhas ANDEF (1987).
Fonte: (GALLO, 2002)

Pela tabela 1 verifica-se que a cana-de-açúcar é a mais afetada no mundo, no total são 54% de perdas, sendo 20% causado por pragas, em termos de danos causados por pragas a cana-de-açúcar está apenas atrás do arroz. O Brasil, por ser um país com clima favorável tem extensas áreas cultivadas, também apresenta sérios problemas de pragas, levantamentos realizados no Brasil (em 1999) indicaram que pragas foram responsáveis por perdas da ordem de 2,2 bilhões de dólares para as principais culturas brasileiras (GALLO, 2002).

3. CONTROLE BIOLÓGICO DE PRAGAS

Nos anos 40, século XX acreditava-se que com lançamento de um defensivo químico, as lavouras estariam sendo protegidas. Com o passar do tempo, os agricultores começaram a perceber que as infestações persistiam e, além disso, as pragas foram adquirindo maior resistência aos agrotóxicos. Antes dos anos 40 apenas sete insetos apresentavam resistências à ação dos produtos químicos, atualmente mais de 500 espécies são consideradas resistentes, o controle feito por processos químicos pode comprometer a cadeia dos predadores naturais, desequilibrando em favor das pragas e diminuído a diversidade biológica. O controle biológico é estratégia utilizada pela própria natureza para manter o equilíbrio dos ecossistemas, uma das coisas que se busca atualmente é a introdução de insetos predadores de outros insetos (BASSANESI, 2014).

Segundo Bassanesi (2014), os modelos matemáticos podem ser impraticáveis, assim deve ser razoável, não complexo de forma a impossibilitar informações necessárias e práticas, mas também não tão simples ao ponto que possa comprometer qualquer interpretação, do ponto de vista instrucional, o modelo de Lotka-Volterra é ainda o mais recomendado.

3.1. CONTROLE BIOLÓGICO DA BROCA DA CANA-DE-AÇÚCAR

Por passar maior parte do ciclo no interior do colmo (dentro da cana), a broca da cana - *Diatraea saccharalis* - tem dificultado seu combate por agentes químicos, atualmente a forma mais eficiente para combater a broca tem sido o controle biológico, utilizando-se propositadamente insetos predadores espalhados no canavial (BASSANESI, 2014).

Embora no Brasil a introdução de inimigos naturais tenha se iniciado em 1921, com a Prospaltela berlesi (Aphelinidade), proveniente dos EUA utilizada para controlar a cochonilha-branca-do-pessegueiro, foi apenas nos últimos anos que se registraram grandes avanços na área no nosso país, a tabela 2 apresenta os exemplos de sucesso de controle (GALLO, 2002).

Cultura	Inimigos naturais	Origem	Ano da introdução	Praga Visada
Cana-de-açúcar	Cotesia flavipes	Introduzido	1974	Diatraea saccharalis
Soja	Trissolcus basalis	Nativo	___	Percevejos
Tomate industrial	Trichogramma prestiossum	Introduzido	Década de 90	Tuta absoluta
Trigo	Microimenópteros	Introduzido	Década de 70	Pulgões
Pastagens	Neodusmetia sangwani Predador	Introduzido	Década de 60	Antonina graminis
Florestas	Podisus nigrispinus	Nativo	___	Lagartas desfolhadoras

Tabela 2: Exemplos de sucesso de controle biológico usando inimigos naturais no Brasil
Fonte: (GALLO, 2002)

Conforme tabela 2, no Brasil o controle dos inimigos naturais da cana-de-açúcar tem sido feito com a utilização da vespa – *flavipes* – aqui introduzida desde 1974. Sem dúvida o caso de maior impacto, é o do controle biológico de *Diatraea saccharalis*, com a introdução e liberação de *Cotesia flavipes*, a intensidade de infestação (IF) da broca-da-cana que se encontrava entre 8 a 10% passou para 2% em São Paulo, gerando uma economia de 80 milhões de dólares por ano, reduzindo as perdas nos últimos anos que era de 100 milhões de dólares por ano para 20 milhões (GALLO, 2002).

4. MODELAGEM MATEMÁTICA

"A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" (BASSANESI, 2004).

A modelagem matemática é uma ferramenta importante e necessária para resoluções de problemas aplicados a diversas áreas do conhecimento, também é aplicada nos processos agroindustriais permitindo uma melhor compreensão e interpretação do fenômeno estudado, como os conceitos, práticas e técnicas, experimentando o processo de investigação, resolução e execução. Neste sentido, sua utilização nas áreas ambientais e agrícolas vem se destacando, proporcionando uma avaliação qualitativa e quantitativa do controle das populações da praga.

Existem diversos estudos conduzidos no intuito de proporcionar aplicações do modelo de dinâmica populacional.

Thomas Robert Malthus propôs em 1798 um modelo para previsão do crescimento populacional, o modelo malthusiano baseia-se na equação diferencial (MAGALHÃES, 2012).

Bassanesi (2014) descreveu o modelo predador-presa com o fator pesca. Utilizou também o modelo de Holling-Tanner, que faz considerações sobre o efeito predação não estabelecidas no modelo clássico de Lotka-Volterra. Aplicou o modelo do tipo Lotka-Volterra: Vespa X Broca.

Os modelos que buscam interações entre as espécies têm como objetivo estudar os processos biológicos e ecológicos envolvidos no sistema, utilizando a modelagem matemática, de maneira que incluem funções adequadas para trabalhar de forma clara o comportamento das populações em sistemas dinâmicos (BATTEL, 2012).

A informatização de modelos matemáticos, pode minimizar riscos ambientais, reduzir custos de produção e otimizar o planejamento agrícola (SILVA, 2001). Os modelos de simulação predador-presa, desenvolvidos através de ferramentas computacionais promove a adoção do controle biológico de pragas (PARRA, 2002).

5. MODELO DE LOTKA-VOLTERRA

Os modelos matemáticos são ferramentas utilizadas em várias áreas do conhecimento científico, importantes para o estudo da dinâmica das populações. Thomas Robert Malthus iniciou os primeiros ensaios, descrevendo sobre o poder de reprodução do homem, que crescia a uma razão geométrica superando a capacidade da terra de produzir meios necessários à conservação da vida, para o sustento do homem, que aumentava de forma linear, a uma razão aritmética (MALTHUS, 1798).

Com a evolução da modelagem matemática, vieram vários outros modelos, os mais recentes como o modelo de Gompertz que utiliza uma taxa de inibição da variável de estado proporcional ao logaritmo desta variável, onde a taxa de crescimento aumenta muito inicialmente, e varia rapidamente seu comportamento para um crescimento de forma lenta, o modelo é dado pelo problema de Cauchy (equação diferencial com condição inicial). O modelo de montroll, cujo objetivo principal do modelo é propor diferentes formas de decrescimento das taxas de variação (BASSANESI, 2014).

Os modelos matemáticos de competição e predação tiveram sua origem com Lotka em 1925, Volterra em 1926, que propuseram um modelo posteriormente denominado modelo de Lotka-Volterra utilizados para descrever a dinâmica de sistemas do tipo predador-presa, onde uma das espécies é predadora da outra, a presa, que se alimenta de outro tipo de alimento. A formulação matemática do modelo é composta do modelo malthusiano e da lei de ação, da interação entre espécies, esta tem sido ponto de partida para o desenvolvimento de novas técnicas e teorias matemáticas, que trata da interação entre duas espécies, em que a presa dispõe de grande quantidade de alimentos, e outra, predador, tem como suprimento apenas a população de presas (BASSANESI, 2014).

Admitindo que durante o processo, num intervalo de tempo Δt, o meio não deve mudar favorecendo alguma das espécies e que qualquer adaptação genética é suficientemente lenta (BASSANESI, 2014).

- Variações do número de presas = aumento natural – destruição pelos predadores.
- Variações do número de predadores = – morte na ausência de presas + aumento causado pela alimentação disponível.

6. MATERIAIS E MÉTODOS

Sejam $x = x(t)$ a densidade populacional das presas e $y = y(t)$ a densidade da população de predadores das presas em função de t. De maneira simplificada o modelo de supõe que as presas crescem de forma exponencial na ausência dos predadores, conforme modelo de Malthus, e que a taxa de mortalidade dos predadores na falta de presas é proporcional a sua população $y(t)$ em cada instante, ou seja, a falta de presas motiva a morte de predadores (BASSANESI, 2014).

Para Bassanesi (2014), a taxa de nascimento dos predadores depende exclusivamente, neste modelo, da quantidade de presas devoradas em cada encontro. Se modelarmos os encontros possíveis pelo termo bilinear xy, então o sistema presa-predador simplificado pelas imposições à cima, é dado por:

$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$ ....equação (I)

$\frac{dy}{dt} = -\alpha y + \beta xy$..equação (II)

Onde a, b, α, β são constantes positivas.

Em que;

- a: corresponde a taxa de crescimento efetiva da população das presas na ausência de predadores;
- α: é a taxa de mortalidade da população de predadores na ausência de presas;
- b: é a taxa de decréscimo da população de presas devido aos encontros com predadores;
- β: é a taxa de crescimento populacional dos predadores devido à predação.

De acordo com Bassanesi (2014) o sistema apesar de ser não linear, pode ser analisado no plano de fase, eliminando a variável t, através da regra da cadeia:

$\frac{dx}{dt} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dy}{dt}\right)}$ .... equação (III)

$\frac{dx}{dt} = \frac{ax - bxy}{-\alpha y + \beta xy}$ .... equação (IV)

$\frac{dx}{dt} = \frac{x(a - by)}{y(-\alpha + \beta x)}$ .... equação (V)

$\frac{(-\alpha + \beta x)}{x} dx = \frac{(a - by)}{y} dy$ .... equação (VI)

Integrando ambos os membros da equação (VI)

$\int \frac{(-\alpha+\beta x)}{x} dx = \int \frac{(a-by)}{y} dy$ .... equação (VII)

$\int \left(-\frac{\alpha}{x} + \beta\right) dx = \int \left(\frac{a}{y} - b\right) dy$ .... equação (VIII)

$-\alpha lnx + \beta x = alny - by + C$ .... equação (IX)

Em que C, é uma constante de integração.

De acordo com Bassanesi (2014), na equação (IX) nem x e y podem ser explicitados em termos de funções elementares. As trajetórias representantes pela equação (IX) podem ser traçadas por meio do método gráfico de Volterra. Atualmente, utilizando métodos da análise numérica, pode ser desenvolvida de forma rápida por métodos computacionais.

7. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir dos modelos para simulação de dinâmica populacional, é possível fazer estimativa do comportamento populacional de ambas as populações em diferentes cenários. Parametrizando as características como taxa de morte, população inicial, expectativa de vida e outras.

Essa simulação é discreta (tempo pré-definido) e o modelo matemático é contínuo, apresentando, por exemplo, nascimento e morte parciais de indivíduos continuamente no tempo (AGUIRRE, 2007). Mesmo diante desse cenário, o modelo e a simulação representam o crescimento populacional da praga de forma exponencial, indicando que o modelo apresentado neste tem a capacidade de representar a dinâmica populacional da *Diatraea saccharalis*.

7. CONCLUSÃO

Concluiu-se que a modelagem matemática é uma ferramenta necessária, por essa razão está sendo apresentado o modelo de Lotka Volterra desenvolvido passo a passo para acesso e entendimento de todos, haja vista que para futuros trabalhos será proposto a implementação computacional com dados da literatura, o que irá proporcionar conhecer a dinâmica entre as duas populações podendo contribuir significativamente para o sucesso do controle de pragas, em sistemas agroindustriais.

8. REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L.A. Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais. 3. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2007, 730 p.

BASSANEZI, R.C. Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, C. R. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. 2. Ed. - São Paulo, Contexto, 2004.

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia 4. ed. – São Paulo: Contexto, 2014. 380 p.

BATTEL, A.P.M.B.; MORAL, R.A.; GODOY, W.A.C. Modelos matemáticos predador-presa e aplicações ao manejo integrado de pragas. Oecol. Aust., v. 16, n. 1, p. 43-62, 2012.

BEGON M.; HARPER, J.L.; TOWNSEND, C.R. 1996. Ecology: Individuals; Populations and Communities., 3rd edition. Blackwell Science, Oxford.

DINARDO-MIRANDA, L.L.; FRACASSO, J.V.; COSTA, V.P. da et al. Reação de cultivares de cana-de-açúcar à broca do colmo. Bragantia, v. 72, n. 1, p.29-34, 2013.

FREIRE, R.M.; PREGNOLATTO, S.; WALDER, J.M.M. et al. Modelagem matemática aplicada ao controle biológico de Ceratitis capitata Wiedemann (Diptera: Tephritidae) por Diachasmimorpha longicaudata Ashmed 76 (Hymenoptera: Braconidae) em Citrus. Neotrop. Entomol., v. 34, n. 2, p. 281-289, 2005.

GALLO, D. Entomologia Agrícola. et. al – Piracicaba: FEALQ. 2002.

GARCIA, F.H.S. Dinâmica temporal do estado fisiológico de cana-de-açúcar sob déficit hídrico. 2015. 57 f. Dissertação (Mestrado em Agronomia). Universidade Federal de Lavras. Lavras-MG. 2015.

GOES, T.; MARRA. R.; SILVA, S. G. Setor sucroalcooleiro no Brasil: situação e perspectivas. Revista canavieiros, Sertãozinho, SP, n,2, ISSN 1413-4969, p.39-51, Ano XVII. Abr./Maio/Jun. 2008.

LIMA, A. D. – "Otimização do aproveitamento do palhiço da cana-de-açúcar" – Tese de Doutorado, UNESP, 2009.

MAGALHÃES, M. L. A.; LEITE, N. M. G. Equações Diferenciais aplicadas à Dinâmica Populacional. Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, CMAC, 2012.

MALTHUS, T.R. Malthus, An Essay on the principle of population (J. Johnson, London, 1798).

MORAES, C. Há área disponível para a cana-de-açúcar. Revista canavieiros, Sertãozinho, SP, n.15, set.2007.

OLIVEIRA FILHO, F.X. de. Análise espacial da compactação do solo em área cultivada com cana-de-açúcar. 2014. 108 f. Tese (Doutorado em Agronomia: Fitotecnia) Universidade Federal Rural do Semi-Árido – Mossoró-RN. 2014.

PARRA, J.R.P.; BOTELHO, P.; CORRÊA-FERREIRA, B.S. et al. Controle biológico no Brasil: Parasitoides e Predadores. [S.l.: s.n.]. São Paulo: Manole, 2002, p. 1-586.

PORTELA, G.L.F.; PÁDUA, L.E. de M.; BRANCO, R.T.P.C. et al. Flutuação populacional de Diatraea saccharalis (Fabricius, 1794) (Lepidoptera - Crambidae) em cana-de-açúcar no município de União-PI. Revista Brasileira de Ciências Agrárias, v. 5, n. 3, p. 303-307, 2010.

PORTELA, G.L.F.; PÁDUA, LE. de M.; BRANCO, R.T.P.C. et al. Infestação de Diatraea spp. em diferentes variedades de cana-de-açúcar em união - PI1. Revista Caatinga, v. 24, n. 1, p. 149-152, 2011.

SILVA, F.B.; BERGAMASCO, A.F. Levantamento de modelos matemáticos descritos para a cultura de cana-de-açúcar. Revista Biociências, v.1, n.1, p. 7-14, 2001.

ZOTIN, R. – “Efeitos abióticos e a periodicidade em dinâmica populacional” – Dissertação de Mestrado, IMECC – UNICAMP, 1993.