INTRODUÇÃO

As motivações para o desenvolvimento deste estudo foram se apresentando ao longo da minha vida acadêmica. No ano de 2005, tornei-me egressa do curso de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Estadual de Feira de Santana. O meu ingresso no curso foi motivado pela afinidade que eu havia desenvolvido com a disciplina durante o Ensino Fundamental e Médio.

Durante a formação básica fui considerada uma excelente aluna, inclusive em matemática; já a maioria dos meus colegas era considerada muito abaixo da expectativa. Ao ingressar na graduação, comecei a ver que aquele conhecimento adquirido e fortemente reconhecido nos meus primeiros anos escolares não era tão sólido assim, e tive muita dificuldade durante o curso. Parecia que me faltavam pré-requisitos: eu até sabia operar bem com os signos, mas faltava-me a fundamentação teórica daquelas operações. Operar: era isso que os meus professores exigiam, era isso que os exercícios requeriam, era isso que eu havia aprendido. Ainda durante a graduação, tive as primeiras experiências como regente de sala, pois, até então, minha experiência docente era apenas com aulas particulares e individualizadas.

No decurso de 10 anos de docência, atuei no ensino fundamental e médio e também em cursos de graduação a distância com as disciplinas de Fundamentos de Matemática e Geometria. Ao assumir as aulas, percebi que grande parte dos alunos não sabia matemática e de certa forma achava que não seria capaz de aprender. E por isso, concordamos com Longarezi e Puentes (2013) ao afirmar categoricamente que se aprende pouco, aprende-se mal, aquilo que se aprende é esquecido com facilidade e tudo isso interfere minimamente no desenvolvimento integral da personalidade dos estudantes. Confesso ter me questionado por diversas vezes se o problema não estava em mim, mas o *feedback* dos alunos não era esse.

A partir de então, meus esforços foram empreendidos no sentido de mudar esta realidade, ao menos para aqueles que tinham contato comigo, aqueles que eram meus alunos. Buscava livros, jogos, técnicas, troca de experiências com outros professores, minicursos, e outras atividades que pudessem envolver os alunos no processo de aprendizagem e também me capacitar para favorecer esse envolvimento.

Ingressei no curso de pós-graduação *lato-sensu*, cujo foco era a Metodologia do Ensino de Matemática; embora conseguido algumas melhorias nas minhas aulas, eram poucos os alunos que conseguiam alcançar o desempenho que eu havia colocado como meta.

Por causa de questões ligadas à indisciplina nas escolas em que trabalhei e, principalmente, por ter salas muito cheias, o que favorecia o mau comportamento dos alunos e esgotamento do professor, fui me sentindo desanimada e inconscientemente levada a me afastar da sala de aula, assumindo outras frentes de trabalho dentro da escola.

Como ainda assim, permanecesse essa insatisfação com o baixo desempenho dos alunos, ingressei no mestrado com a mesma inquietação, mas agora como pesquisadora do problema. Aqui, minha proposta de pesquisa foi situada na linha de pesquisa Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo Ensino-Aprendizagem, na qual está alocado o projeto de pesquisa “O ensino e a aprendizagem da álgebra nos anos finais do ensino fundamental”.

A pesquisa realizada é parte integrante das investigações iniciadas no âmbito do Edital 13/2012 CAPES/FAPEMIG e do Programa Observatório da Educação – OBEDUC, desenvolvido na Universidade de Uberaba (UNIUBE), com apoio da CAPES. O Edital 13/2012 da FAPEMIG tem o objetivo de “apoiar financeiramente projetos de pesquisa e de inovação que permitam criar estratégias diferenciadas de ensino e aprendizagem, bem como, desenvolver políticas de formação docente para a elaboração de orientações sobre o uso de tecnologias na prática pedagógica, nos diversos campos do conhecimento em questões relacionadas à educação básica das redes públicas de ensino de Minas Gerais”.

O Programa OBEDUC foi instituído pelo Decreto Presidencial nº 5.803 de 2006, numa parceria da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES e a *Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão – SECADI,* e prevê o desenvolvimento de pesquisas que envolvam desde a aplicação de teorias educacionais diretamente com alunos até a formação de professores. O Programa visa estimular a articulação entre a pós-graduação, licenciaturas e escolas da educação básica, por meio de pesquisas, estudos e publicações, aproveitando os recursos das Instituições de Ensino Superior e a base de dados dos INEP. Essa investigação se insere nesse Programa, como dito anteriormente, através do projeto “O ensino e a aprendizagem da álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental”.

Na trajetória da pesquisa, fui me sentindo um pouco mais à vontade com esses conflitos, e também mais confiante para realizar o estudo, devido ao fato de encontrar neste Programa de Pós-Graduação colegas intrigados com as mesmas questões, que estavam dispostos a procurar caminhos possíveis de transformação, não apenas através de experiências baseadas no princípio da tentativa e erro, nem em discussões sob a ótica do lugar-comum, mas através de um estudo aprofundado, com embasamento teórico, com objetivos e ações intencionais, buscando aliar a teoria e a prática, e levando em consideração os progressos e retrocessos das diversas correntes teóricas, além das condições concretas para a realização das intervenções e análises.

Outro aspecto de plena identificação ao realizar esta pesquisa foi o entendimento de que o foco da nossa atividade não é apenas o ensino, mas, sobretudo, a aprendizagem que promove o desenvolvimento do aluno. E que os conhecimentos construídos pela humanidade devem ser apresentados a todos os estudantes, independentemente de sua posição ou classe social, com a mesma profundidade e qualidade, pois todos são capazes de aprender se lhes forem proporcionadas as condições necessárias.

O nosso[1]estudo encontra justificativa nos dados de baixo desempenho dos alunos nas avaliações realizadas em âmbito nacional, tais como o ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio e outros exames realizados pelo SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica, mostrando assim que não se trata de uma inquietação pessoal apenas. Da mesma forma, no Plano Decenal de Educação do Município de Uberaba aparece explicitamente como providência primordial “coordenar todo o trabalho pedagógico das escolas municipais a partir das evidências do desempenho dos alunos, apontadas pelos resultados das avaliações externas.” (Uberaba, 2007, p. 28).

Já no ano de 1998, nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN havia indicativo de que raramente era possível atingir o índice de 40% de acerto nos itens referentes à álgebra.

No ano de 2013, em um estudo mais recente, realizado por Da Silva, Flores e Novikoff (2013, p.26) sobre os resultados da avaliação do SAEB, aplicada no ano de 2009, os autores afirmam estar negativamente impressionados com o baixíssimo desempenho dos alunos em tema tão relevante e presente no dia a dia, o que revela a total falta de habilidade dos alunos nos itens relacionados à álgebra e à aritmética.

É sabido que a Matemática possui uma linguagem própria, com símbolos específicos, que nos remetem a significados e abstrações das relações ali apresentadas. Neste contexto, durante a transposição de determinado problema em linguagem usual para a linguagem algébrica, elimina-se a referência ao contexto ou situação que originou o problema ou relação, e priorizam-se as generalizações. Assim, os processos cognitivos necessários à sistematização da linguagem algébrica e do pensamento algébrico indicam possíveis razões para as dificuldades com relação à aprendizagem da álgebra.

Dentro deste debate, Battisti e Nehring (2009, p.2) apontam:

[1]A partir desse ponto, usarei a primeira pessoa do plural, pois considero o trabalho uma construção partilhada, discutida entre várias vozes.

> A apropriação das significações dos conceitos matemáticos se estabelece a partir de abstrações e generalizações, estando fundamentada em representações de diferentes níveis, que precisam ser expressas por uma linguagem própria. Mesmo que as primeiras representações, tanto na história da matemática como na do indivíduo, estejam relacionadas a situações empíricas ou imagináveis, o avanço no processo de elaboração conceitual está relacionado à desvinculação dos mencionados aspectos e às suas formalizações.

Corroborando essa afirmação, estudos apontam que, com a larga utilização dos sistemas computacionais e as facilidades que estes sistemas oferecem, com respostas rápidas e que dispensam longos cálculos, a ênfase da aprendizagem pode se concentrar no desenvolvimento e compreensão de conceitos científicos, representação de fenômenos de forma algébrica e gráfica, além da interpretação, avaliação e apresentação de dados. Em todas estas tarefas, exige-se um profundo conhecimento dos conceitos de álgebra, que estão para além da manipulação de algoritmos (COXFORD; SHULTE, 1995).

Dentro do aporte da Teoria Histórico-Cultural, que foi escolhida por nós como base epistemológica e de fundamentação teórica, Zankov assevera que “o descobrimento da relação objetiva e necessária entre a estrutura do ensino e o processo de desenvolvimento da psique dos escolares significa em nossa investigação que a estrutura do ensino é a causa de certo processo de desenvolvimento geral dos escolares.” (ZANKOV, apud AQUINO, 2013, p. 241)

Enxergamos na Teoria Histórico-Cultural desenvolvida por Vigotski, contribuições acerca da transposição necessária entre as linguagens usual e algébrica, por analisar especialmente o processo pelo qual o indivíduo aprende.

Para Vigotski[2] (2010, p. 398),

> O significado da palavra, como tentamos elucidar anteriormente, é uma unidade indecomponível de ambos os processos e não podemos dizer que ele seja um fenômeno da linguagem ou um fenômeno do pensamento. Uma palavra desprovida de significado não é palavra, é um som vazio. Logo, o significado, é um traço constitutivo indispensável da palavra.

Percebemos que, da mesma forma, os símbolos algébricos apresentados aos estudantes apenas na esfera das operações não geram apropriação do seu significado; correspondendo ao mesmo som vazio. Por exemplo, quando se afirma que:

a) O produto entre qualquer número e zero é zero.

b) $\forall$ x, $x \cdot 0 = 0$, $x \in \mathbb{C}$

O que está escrito no item a) significa o mesmo que está escrito no item b), porém nesta, em linguagem algébrica. O aluno se apropria dessas linguagens e da propriedade que elas encerram? Essas linguagens constituem-se em elementos mediadores dos conteúdos algébricos? Elas estão postas de forma a contribuir para a formação dos conceitos algébricos? São questões como essas que motivam nosso estudo.

Para Vigotski (2010), os signos medeiam o desenvolvimento psicológico do indivíduo, as relações humanas e as interações sociais. Portanto, toda a relação de ensino-aprendizagem passa inevitavelmente pela questão da linguagem. Segundo esta teoria, a apreensão do conhecimento se concretiza nas interações que o indivíduo estabelece num ambiente de aprendizagem formal, tendo em vista apropriar-se dos conhecimentos construídos pela humanidade ao longo de sua história. E a escola tem como papel primordial favorecer a transmissão da cultura historicamente acumulada, o desenvolvimento dos conceitos científicos e das leis mais profundas e essenciais que os regem, através do acesso ao conhecimento sistematizado.

Por outro lado, Vigotski (2010) ressalta, por exemplo, que, muitas vezes é impossível comunicar a uma criança determinada informação visto que ela não possui a generalização requerida. E não se trata de insuficiência de palavras, mas sim do conceito que a palavra exprime. Diz ainda que "em qualquer idade, um conceito expresso por uma palavra representa uma generalização, mas os significados das palavras evoluem" (VIGOTSKI, 2010, p. 246).

Assim, dentro deste quadro teórico, entende-se que no momento em que a criança toma conhecimento pela primeira vez do significado de uma nova palavra o processo de desenvolvimento dos conceitos não termina, mas está apenas começando. (VIGOTSKI, 2010, p. 250). O aporte teórico desenvolvido por Vigotski nos permite afirmar que a relação entre pensamento e linguagem é dialética: a linguagem e o pensamento se relacionam e se influenciam constantemente fazendo parte de um único processo: o de formação de conceitos.

Segundo Alves (2010, p. 5):

> O componente dialético afirma que a realidade concreta não é uma substância estática numa unidade indiferenciada, mas uma unidade que é diferenciada e especificamente contraditória: o conflito de contrários faz avançar a realidade num processo histórico de transformação progressiva e constante, tanto evolucionária como revolucionária, e, em suas

---

[2]Tendo em vista a ausência de regra internacional de transliteração dos nomes dos autores russos adotamos a grafia mais próxima da utilizada na língua portuguesa brasileira, suprimindo o uso de acentos, visto que em russo também não há acentuação gráfica, exceto nos casos de citação direta.

> transformações revolucionárias ou descontínuas, dá origem à novidade qualitativa autêntica.

Também no percurso de definição do objeto da pesquisa, tivemos idas e vindas, avanços e retrocessos. Nele, entramos em contato com trabalhos importantes sobre a temática, a exemplo dos realizados por Lins e Gimenez (2001), Fiorentini, Miorim e Miguel (1992, 1993), Usiskin (1995) e Lee (2001), em que os autores definem e apresentam concepções de álgebra e de educação algébrica.

Dentro dessa perspectiva, Figueiredo (2007) realizou um estudo sobre essas concepções, no qual identifica que uma das causas para as dificuldades encontradas pelos estudantes, ao lidar com a álgebra, está ligada às concepções de álgebra que eles próprios possuem e também às que recebem de seus professores, desde os anos iniciais. A partir daí, é possível indagar-se sobre quais concepções de álgebra são trabalhadas com os estudantes nos anos iniciais. E afinal, a partir de que ano a álgebra é introduzida no sistema de ensino.

Compreendemos a álgebra em suas diversas concepções, como o fazem Berdnaz *et al.* (1996, p. 4 *apud* RESENDE, 2007, p. 188): "o estudo de uma linguagem e sua sintaxe; o estudo de procedimentos de resolução de certas classes de problemas; o estudo das regularidades que governam as relações numéricas; e o estudo de relações entre quantidades que variam". E, ainda, a semântica que a envolve. Entendemos, também, que não há passagem do pensamento aritmético para o algébrico, mas ambos se desenvolvem de forma imbricada e continuada.

Não existe consenso entre os estudiosos sobre o que vem a ser álgebra e a partir de quando esse conjunto de ideias é introduzido no ensino de matemática. Contudo, o pensamento algébrico perpassa os diversos campos da matemática, e por isso a importância de seu efetivo aprendizado.

O conhecimento aritmético, que é aprendido pelos estudantes nos anos iniciais, constitui-se em base para o desenvolvimento de conceitos mais elaborados, como é o caso da álgebra em relação à aritmética.

Por outro lado, no contexto da educação escolar, o livro didático tem sido um recurso de mediação muito utilizado pelos professores para ministrar suas aulas, e, por vezes, o único. A própria Constituição Federal do Brasil prevê como dever do Estado a garantia de programa suplementar de material didático-escolar durante o ensino fundamental:

> Art. 208 O dever do Estado com a educação será efetivado mediante a garantia de: [...]
> VII – atendimento ao educando, no ensino fundamental, através de programas suplementares de material didático-escolar, transporte, alimentação e assistência à saúde. (BRASIL, 1990)

Não obstante essa previsão legal e apesar do interesse e investimento do Ministério da Educação em distribuí-los e avaliá-los, segundo estudos realizados por Medeiros & Goulart (2010), as pesquisas apontam a inadequação quase que unânime dos livros didáticos adotados e analisados no Brasil. Inadequações estas que conforme estes autores incluem o desenvolvimento de noções científicas equivocadas.

Assim, o objetivo geral do estudo é analisar se a abordagem proposta nos livros escolares de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental favorece a aprendizagem de conceitos algébricos e possibilita o desenvolvimento das funções psíquicas superiores dos estudantes, na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural.

Como objetivos específicos, desejamos: compreender a relação entre pensamento e linguagem na perspectiva da abordagem Histórico-Cultural; compreender a formação de conceitos, a aprendizagem e o desenvolvimento das funções psíquicas superiores de acordo com a Teoria Histórico-Cultural; identificar as concepções de álgebra presentes nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental; analisar como os conceitos algébricos são abordados nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Existe um número considerável de pesquisas envolvendo o livro didático nas diversas áreas do conhecimento. Em sua maioria, pesquisas de cunho crítico-denunciativo. A pesquisa ora realizada tem cunho propositivo dentro da perspectiva de ensino-aprendizagem e desenvolvimento apresentados por Vigotski e seus seguidores.

Atribuímos ao importante papel cultural de recurso pedagógico que o livro didático de Matemática pode desempenhar na socialização do conhecimento desse campo do saber, os inúmeros investimentos dos pesquisadores para sua melhoria. Nossa contribuição está baseada na Teoria Histórico-Cultural, utilizando os livros didáticos de matemática do 8º ano do Ensino Fundamental, adotados pelas escolas municipais da cidade de Uberaba/MG, nos anos de 2011a 2014, inclusive.

Inicialmente, o nosso recorte temporal iniciava-se no ano 2000, numa tentativa de ter como marco os livros adotados pelo município no século XXI, porém, na etapa de levantamento das obras que seriam analisadas, fomos informados através da Secretaria de Educação do Município de Uberaba que entre os anos 2000 a 2010 cada escola adotava o livro que o corpo docente escolhesse, dentre os que eram disponibilizados pelo Programa

Nacional do Livro Didático (PNLD). Desta forma, tornou-se inviável analisar a grande quantidade de livros, que estava estimada em mais de cem obras para o período. Assim, foi analisado o material apostilado do Sistema de Ensino CNEC, adotado pelo município no período de 2011 a 2013, e o livro didático dos autores Sousa e Pataro, *Vontade de saber matemática,* escolhido para o período 2014 a 2016.

É possível perceber nas produções e orientações a respeito do livro didático que não há uma caracterização precisa e consensual do que define um livro como didático. Para Lajolo (1996), o livro didático é aquele que foi elaborado, editado e comercializado com o objetivo de ser usado de forma sistemática no espaço escolar. Como o material apostilado em análise, satisfaz a essas condições, embora saibamos que há algumas diferenças entre eles, vamos tratá-los com a denominação de “livro didático”.

O nosso foco não é o livro didático em si, mas investigar os textos, a apresentação dos conteúdos, os exemplos e a linguagem utilizada para mediar os conceitos algébricos, visando à apropriação desses conceitos e o desenvolvimento dos alunos.

Aquino (2013) nos apresenta algumas pistas para a investigação, quando afirma que, em estudos realizados tomando-se por base, planos de ensino, livros didáticos e a metodologia utilizada, identificou-se uma simplificação dos conteúdos, ritmo de estudo lento com repetições cansativas, conhecimentos teóricos limitados e superficiais e que contemplam, sobretudo, a formação de hábitos.

Não podemos esquecer que a organização do livro didático, a estruturação dos conteúdos, a linguagem utilizada, os exemplos e as propostas de atividades carregam em si, implícita ou explicitamente a concepção de ensino-aprendizagem adotada pelo autor. Em cada tendência pedagógica estão contidas diferentes formas de enxergar o homem e o mundo, em cada uma delas modifica-se a finalidade da educação, muda-se o papel do professor, do aluno, a metodologia, a avaliação, e, consequentemente, muda-se a forma de ensinar.

Além do mais, entendemos que a disposição para aprender matemática por vezes está intimamente ligada ao trato que a família dá à matéria, ao modo como os professores enxergam os conteúdos, além de como e porque os ensina. Em especial, na ação do professor, incluem-se os métodos e estratégias de intervenção e os processos que recorrem ao ensinar, além dos objetivos perseguidos e o papel que atribuem aos alunos durante o processo de ensino-aprendizagem. O livro torna-se um elemento mediador a serviço desses atores e deve atender às necessidades por eles delineadas.

O presente trabalho é composto por três capítulos. O primeiro capítulo apresenta as bases do referencial teórico adotado – a Teoria Histórico-Cultural, com destaque para alguns de seus conceitos, que são utilizados para fundamentar nosso trabalho. Apresenta também os procedimentos utilizados e a metodologia, desenvolvida por meio de pesquisa bibliográfica e documental, realizada nos livros didáticos, alinhada a uma abordagem qualitativa. As unidades de análise dos livros didáticos foram elaboradas a partir do referencial teórico adotado e dos objetivos do estudo.

O segundo capítulo foi dividido em três partes. A primeira parte descreve a Rede Municipal de Ensino de Uberaba, onde a pesquisa foi realizada; apresenta um pouco da história do livro didático no país e sua trajetória no município pesquisado; e aborda a questão da adoção do Sistema Estruturado de Ensino (apostilas em lugar de livro didático). A segunda parte trata especificamente de aspectos relacionados ao ensino de álgebra, onde se apresenta a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para a matéria, as Matrizes Curriculares de Matemática para o 4º ciclo do Ensino Fundamental no município, em confronto com os livros didáticos adotados no período de 2011 a 2014.

No terceiro capítulo, é apresentada a análise dos livros do 8º ano do Ensino Fundamental, com destaque para os seguintes conteúdos: expressões algébricas, polinômios, equações, sistemas de equações e inequações. Em seguida, são apresentadas as considerações finais do estudo.

1 – A FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: AS CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL E AS CONCEPÇÕES DE ÁLGEBRA E DE EDUCAÇÃO ALGÉBRICA

Neste capítulo apresentamos as bases do referencial teórico adotado – a Teoria Histórico-Cultural – que se constitui como uma teoria psicológica e pedagógica, ao abordar conceitos de ser humano, de sociedade, de mundo, de ensino, de aprendizagem, de desenvolvimento, de escola, entre outros; e compreende que a educação é o principal motor de transmissão da cultura histórica e socialmente construída, mostrando assim a influência do ensino na formação das pessoas e a relação entre o desenvolvimento do psiquismo e os processos educativos.

1.1 A Teoria Histórico-Cultural e suas bases

O ser humano, que hoje julgamos conhecer com seus costumes e valores, foi e continua sendo constituído ao longo de sua história. Não há de causar estranheza as aparentes habilidades às quais os bebês de hoje parecem já nascer dotados, pois em cada nova geração, o ser que nasce carrega determinadas condições de vida acumuladas historicamente que lhe servirão de conteúdo para seu desenvolvimento. Compreender o que é o ser humano, como se comporta, como se organiza, como se constitui e desenvolve-se, como interpreta o mundo à sua volta, o que lhe motiva e o que faz de cada um tão singular, é buscar aproximar-se da própria essência do que vem a ser "ser humano".

Ao longo de sua história, o homem, para sua sobrevivência, precisou trabalhar em grupo e organizar-se em sociedade. O homem também foi percebendo que era necessário transmitir aos seus semelhantes o conhecimento que vinha adquirindo, que era necessário explicar o mundo à sua volta, e também compartilhar dúvidas e formas de enxergar questões insolúveis; questões que ainda hoje inquietam a humanidade. Essas duas atividades, organização social e transmissão de conhecimento, caminham de forma interligada e desencadeiam diversas outras demandas que permeiam a vida dos homens em todos os tempos.

Os seres humanos encontram formas diferentes de enxergar o mesmo objeto, e em consequência de tentativas de compreensão e de explicação do mundo, surgiram duas vertentes de teorias: a materialista e a idealista.

De acordo com Alves (2010, p. 1):

> Materialismo é toda concepção filosófica que aponta a matéria como substância primeira e última de qualquer ser, coisa ou fenômeno do universo. Para os materialistas, a única realidade é a matéria em movimento, que, por sua riqueza e complexidade, pode compor tanto a pedra quanto os extremamente variados reinos animal e vegetal, e produzir efeitos surpreendentes como a luz, o som, a emoção e a consciência. O materialismo contrapõe-se ao idealismo, cujo elemento primordial é a ideia, o pensamento ou o espírito.

Em decorrência da organização social, o homem em sua trajetória tem vivenciado diversas formações socioeconômicas. Muitos foram os estudiosos, em variadas áreas do conhecimento, tais como filosofia, antropologia, biologia, história, psicologia, entre outras, que procuraram organizar, interpretar e explicar questões concretas da história das sociedades, seja dentro da teoria idealista, seja dentro da teoria materialista. Entre estes estudiosos, destaca-se Karl Marx, que viveu de 1818 a 1883, em uma época marcada e conhecida pela revolução industrial. A ele é atribuído o mérito do estudo científico da formação social específica chamada "capitalismo".

Para Marx, durante o feudalismo os servos teriam sido oprimidos pelos seus senhores, enquanto que, no capitalismo, seria a classe operária oprimida pela burguesia. Assim, quando houve o desenvolvimento do comércio, as relações servis começaram a desempenhar um papel desfavorável, provocando uma implosão dentro do próprio sistema vigente e originando outro novo sistema: o capitalismo. Conclui-se daí que o capitalismo nasceu a partir das contradições do sistema feudal, e que a burguesia como classe dominante, ao criar a sua oposição, o proletariado, como classe dominada, iniciou também seu processo superação.

Essa linha de raciocínio sobre a superação do feudalismo pelo capitalismo apresenta-se como legado da teoria de Hegel, composta por três momentos: tese (afirmação), antítese (negação) e síntese (negação da negação), em que, num conflito histórico de contrários, a síntese preserva algo de ambos os termos negados.

Em sua teoria, Marx analisa as formações econômicas pré-capitalistas e as tendências do capitalismo, bem como as transformações sociais resultantes da evolução dos meios de produção. Ele cria o materialismo histórico-dialético e avalia as possibilidades do socialismo como ferramenta revolucionária de superação do sistema vigente e com isso propõe a ruptura com o capitalismo. Para ele, esta revolução deve efetivamente melhorar a condição, dos até então, explorados.

Conforme Alves (2010), o materialismo fundamenta-se na teoria de que todos os fenômenos são o resultado de interações materiais. Por sua vez, o materialismo histórico trata das relações que envolvem a matéria em si e os modos de sua produção, de tal forma que determina a vida social, política, econômica e intelectual dos homens no percurso da história. Por fim, a dialética diz respeito ao estudo das contradições na essência mesma das coisas, em sua unidade; admitindo que através de processos quantitativos seja possível extraírem-se transformações tais que representem saltos de qualidade, o que quer dizer, evoluções da realidade inicial.

O materialismo histórico-dialético é influenciado pelos estudos de economia política, em especial Adam Smith; pelo socialismo francês e pela filosofia alemã, especialmente Hegel com sua dialética idealista – superada por Marx, devido à sua experiência no movimento operário.

Os estudos de Marx são denominados teoria marxista e fornecem contribuição para a compreensão do mundo do trabalho, das transformações econômicas e sociais determinadas pela evolução dos meios de produção. Muito embora se diga que sua teoria não tenha objetivo direto ligado à educação, é inegável sua influência também neste campo, pois Marx desejava contemplar todas as etapas de desenvolvimento do ser humano na proposta de uma nova sociedade.

Entenda-se por desenvolvimento do ser humano como o desenvolvimento de um indivíduo que carrega em si a história de sua espécie, com sua cultura material, intelectual e espiritual, bem como as relações que desenvolve com seus semelhantes e com a natureza. Durante este processo de constituição do indivíduo social é fundamental o papel dos mediadores, aqueles que já se apropriaram dessas relações e dessa cultura e que interagem com o indivíduo em formação.

É esse o papel assumido pela educação: mediar a formação do indivíduo através da interação entre o adulto e a criança, a fim de transmitir-lhe os conhecimentos socialmente construídos pela humanidade e mobilizá-lo de forma integral, como sujeito social e histórico (NÚÑEZ, 2009).

Diante dessa tarefa, cabe ressaltar que no processo educacional estão envolvidos interesses sociais, políticos e econômicos que não devem ser ignorados. Assim, Marx defendia uma educação que dotasse o cidadão de capacidade crítica, especialmente em relação às ideologias embutidas nos sistemas econômicos, políticos e etc. Em sua concepção, a educação deve atuar como mediadora do conhecimento, com o papel de criticar, diagnosticar e denunciar as ideologias e as várias formas de alienação a que é submetida a sociedade; e também de transformar, apresentar propostas de superação da realidade e reivindicar das autoridades competentes a devida organização da sociedade e condução da vida social, garantindo a todos seus direitos e cobrando-lhes a colaboração e responsabilidade, em vistas de construir uma educação emancipatória e não alienadora, deixando de reproduzir o injusto sistema de classes que legitima os interesses das classes dominantes. A educação deve instrumentalizar de tal forma o estudante que o transforme em um agente político que pensa, age e usa a palavra como arma para transformar o mundo (MÉSZÁROS, 2005).

Por esta via, educar não se trata simplesmente da formação do homem determinado pela história, mas essencialmente do homem racionalmente dotado de inteligência para transformá-la. E mais, para Marx, o ponto de partida para a transformação da sociedade não é a mudança do indivíduo; para ele só há mudança se mudarem as relações sociais.

Dentro dessa perspectiva, um expoente no campo das teorias educacionais é o psicólogo russo, Lev Vigotski, que estabeleceu as bases da Teoria Histórico-Cultural, que tem suas bases no materialismo histórico-dialético de Marx, e cujo projeto central, segundo Rigon; Asbahr e Moretti (2005, p. 22) "é estudar a formação da subjetividade dos indivíduos a partir de seu mundo objetivo, concreto, isto é a formação da consciência humana em sua relação com a atividade."

Conforme Duarte (2000, p.82), "Vigotski pretendia fundamentar em Marx a construção da psicologia, pretendia construir uma psicologia marxista e para isso se fazia imprescindível a adoção do método de Marx em sua globalidade." E assumir o marxismo como pressuposto teórico de seus estudos incluía assumir a concepção que Marx desenvolveu de ser humano, de sociedade e de história.

Nesse sentido, Ortega e Gasset, citados por Rigon; Asbahr e Moretti (2005, p. 16) fazem uma valiosa distinção entre homens e animais, que esclarece a concepção de homem na teoria marxista.

> A ruptura entre homens e animais, dessa forma, não pode ser explicada apenas pela evolução biológica. Se, por um lado, o homem biológico, assim como o animal defronta-se com necessidades que são orgânicas e vitais, por outro, não se contenta em coincidir sua vida com essas condições objetivas.

Vigotski inquieta-se com a necessidade de uma teoria geral da psicologia; uma teoria que possibilitasse a construção de uma psicologia marxista, e que fosse capaz de superar as diversas correntes teóricas surgidas e que se mostravam incapazes de concatenar em resultados os inúmeros dados obtidos com as pesquisas empíricas que empreenderam.

Vigotski sempre demonstrou preocupação em não ferir a coerência entre os pressupostos teóricos contidos na análise dos dados e nos métodos de obtenção desses dados. Ele considerava ser necessária uma teoria que desempenhasse para a psicologia o mesmo papel que a obra “O capital” de Karl Marx desempenha para a análise do capitalismo.

Segundo Rigon; Asbahr e Moretti (2005, p. 21):

> Se para a economia política de Marx cabe estudar o desenvolvimento dos modos de produção no decorrer da história, ou seja, como os homens produziram suas vidas por meio de sua atividade produtiva, para a psicologia histórico-cultural cabe o desafio de compreender como as formas sociais de atividade produzem formas específicas de psiquismo humano, ou como se desenvolvem socialmente as formas individuais do psiquismo.

O cerne da teoria é que, pela atividade, se potencializa o desenvolvimento das funções psíquicas, e assim o homem não só transforma o objeto com sua atividade, mas transforma-se a si mesmo.

Vigotski (1896-1934) morreu aos 37 anos, o que fez com que sua obra ficasse inacabada. Porém, muitos estudiosos contemporâneos seus, e outros que ainda hoje são considerados como seus seguidores, deram prosseguimento ao estudo da Teoria por ele iniciada. Entre eles destacam-se, segundo Longarezi e Puentes (2013), no livro intitulado “Ensino Desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos”:

- Leontiev (1903-1979), que desenvolveu a Teoria Geral da Atividade e sistematizou o conceito de atividade. Para ele o ser humano conta com três atividades principais: brincar, estudar e trabalhar; por meio das quais é possível se apropriar da cultura humana.

- Luria (1902-1977) trabalhou experimentalmente para comprovar as ideias defendidas pela então nascente Psicologia Histórico-Cultural. Seus estudos trouxeram grande contribuição para a Neuropsicologia.

- Davidov (1930-1998): defende o papel da escola na formação do pensamento teórico-científico, e que as crianças pequenas podem desenvolver o pensamento teórico aprendendo o aspecto essencial dos objetos.

- Talizina, nascida em 1923 e viva até os dias de hoje, contribui com a elaboração do conceito de base orientadora da ação, que se constitui de uma proposta de organização adequada do processo de ensino-aprendizagem.

- Galperin (1902-1988), criador da Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais e dos Conceitos, para ele a estruturação de novas ações é primeiro material, depois verbal e, por fim, mental, possibilitando o desenvolvimento das funções psíquicas.

- Rubinstein (1889-1960), que se dedicou aos estudos das leis gerais de formação da consciência e da relação dialética entre os processos psíquicos e a atividade prática humana. Desenvolveu a Teoria da Generalização Científica.

- Zaporozhets (1905-1981), que criou a teoria do desenvolvimento sensorial e mental das crianças, foi responsável pela introdução da pedagogia pré-escolar e início da etapa escolar aos sete anos, defendendo a extensão da infância. Seus estudos se concentraram principalmente no desenvolvimento de crianças em idade pré-escolar. Também estudou sobre os períodos do desenvolvimento psíquico e os efeitos sobre a educação e o ensino.

- Petrovsky (1924-2006), se dedicou a estudar sobre as implicações dos processos de ensinar e aprender na escola.

É importante destacar que, por estarmos trabalhando com um referencial teórico de origem russa, tivemos dificuldades relacionadas às traduções das obras, que em alguns casos configuraram-se como tradução de tradução. Por isso, muitas vezes utilizamos trabalhos atuais, em forma de artigos científicos, capítulos e livros escritos por pesquisadores que têm se debruçado a estudar a Teoria Histórico-Cultural em nosso país.

A Teoria Histórico-Cultural, criada por Vigotski, se constitui como uma teoria psicológica e pedagógica, propõe princípios de psicologia como fundamentos para práticas educativas, situa o papel da educação como essencial na criação das condições necessárias para o surgimento da consciência do homem, discute os processos cognitivos e apropriação da experiência acumulada historicamente pela sociedade, a aquisição e sistematização dos conhecimentos, e também a função da linguagem como mediadora destes processos. Dessa maneira, a centralidade da teoria histórico cultural está em investigar a formação da consciência a partir do mundo concreto, investigar como o homem se constitui sujeito em sua individualidade, a partir das relações com seus semelhantes e com a natureza. E a educação é o principal motor de transmissão da cultura histórica e socialmente construída, mostrando assim a influência do ensino na formação das pessoas e a relação entre o desenvolvimento do psiquismo e os processos educativos.

Para a Teoria Histórico-Cultural, “o desenvolvimento depende mais das condições de vida da criança e de sua educação do que das qualidades hereditárias dadas ao indivíduo ao nascer”, o que não exclui a importância da herança genética (PUENTES, 2013, p. 176). Essa concepção é fundamental para entender as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos estudantes, uma vez que os requisitos necessários para aprender são desenvolvidos especialmente nas relações sociais, de forma tal que a qualidade dessas relações assume máxima importância.

Por essa ótica, o conhecimento não é transmitido ou adquirido, como sendo um objeto ou uma mercadoria, ele não pode ser instalado no indivíduo, ele é construído, a partir da realidade, do sentido que fazemos do mundo, da interpretação dos fatos que atingem a coletividade. Ele é compartilhado; é resultado de interações e de diálogos. A aprendizagem é efetivada no próprio indivíduo que também é sujeito do processo de ensino-aprendizagem, através de um trabalho externo e interno. Trata-se de um processo ativo de relação do sujeito com o meio.

> Este processo não é considerado pelo enfoque teórico-metodológico em questão como contexto para o desenvolvimento humano, mas como elemento determinante no processo de humanização. Tal concepção nos reporta à tese marxiana de que a vida em sociedade é que determina a consciência e a conduta do homem, e não o seu inverso. Na objetividade da vida em sociedade, como construção histórica e produto de múltiplas determinações, é que o homem encontra as condições e possibilidades reais para desenvolver-se. (BERNARDES, 2010, p. 348)

Neste cenário de trocas e interações, está o professor, cujo papel primordial é o de organizar o ensino, de forma a colocar em atividade o aluno que aprende; em agir intencionalmente e proporcionar situações pedagógicas ricas em desafios, no sentido de favorecer a compreensão dos fatos e o seu encadeamento, tendo em vista o conhecimento a ser aprendido. O professor passa a se preocupar além dos resultados, com o processo como um todo. O professor nesse contexto educa e é educado.

Embora saibamos que existem diferentes concepções e modelos de educação, e que a educação extrapola o ambiente escolar – como bem defendeu Marx – Vigotski, em seus estudos de psicologia, se dedica especialmente a estudar sobre a maneira como o indivíduo e desenvolve, sobre como acontece a apreensão dos conhecimentos da cultura humana, e desse modo concentra esforços na educação escolar. Assim, a escola é uma peça fundamental dentro dessa teoria.

Ao dedicar-se à educação, é claro que ele não está se limitando aos muros dos prédios dessas instituições, pois se assim fosse estaria contrariando a base teórica marxista de formação do indivíduo integral. Por outro lado, também não se limita à educação escolar, pois os conhecimentos adquiridos no período que antecede o ingresso à escola – o que ele chama de conceitos cotidianos – servem de alicerce para a aquisição de novas aprendizagens.

É importante compreender que, ao se debruçar sobre a educação escolar, Vigotski defende seu entendimento de que a apreensão de saberes se concretiza nas interações que o indivíduo estabelece num ambiente de aprendizagem formal, tendo em vista apropriar-se dos conhecimentos construídos pela humanidade ao longo de sua história. Desse modo, a escola tem como papel primordial favorecer o desenvolvimento dos conceitos científicos, e o conhecimento das leis mais profundas e essenciais que os regem, através de um ensino formal, planejado, organizado, sistematizado e intencional.

Assim, a teoria de Vigotski é promotora de uma pedagogia que valoriza a transmissão das formas mais desenvolvidas do conhecimento material e intelectual produzido pela humanidade, e com isso a transformação do próprio indivíduo, conforme assinala (RIGON; ASBAHR; MORETTI (2005, p. 22, 2005, p. 24): "o objeto da atividade pedagógica é a transformação dos indivíduos no processo de apropriação dos conhecimentos e saberes". A educação se torna, por esta perspectiva, uma via pela qual se pode "humanizar" o indivíduo.

A teoria de Vigotski, por se basear nos princípios da dialética, torna-se exigente ao ser aplicada à educação, pois contrapõe o modelo de educação tradicional, preocupado com o repasse dos conhecimentos. A Teoria Histórico-Cultural estabelece uma relação dialética entre a atividade de ensinar e a atividade de aprender, pois ambas são igualmente imprescindíveis e formam um todo indissociável. Não basta que o conhecimento sistematizado exista, ele precisa ser transmitido; da mesma forma não basta que o professor transmita, é necessário que o estudante compreenda.

Mesmo cientes das limitações de se abordar as ideias de um pensamento tão complexo, fica evidente a contribuição de Marx para a compreensão do mundo do trabalho e dos processos de ensino-aprendizagem na contemporaneidade.

Para Marx, o trabalho tem papel fundamental no desenvolvimento do homem e na organização social, política e econômica da sociedade. Para ele, é o trabalho um dos elementos que diferencia os homens dos animais. Já a educação exerce o papel de atividade mediadora do processo de formação do indivíduo, e sua principal referência deve ser o ser humano, não o mercado.

Como vimos até aqui, o conhecimento, seu compartilhamento e até mesmo a necessidade de aprender são conquistas do homem, construídas também historicamente, e que passaram a fazer parte do processo de desenvolvimento do indivíduo, que é um processo cultural e não simplesmente uma herança biológica.

Aqui cabe uma reflexão sobre o papel do conhecimento dentro da teoria marxista, e que está no bojo das reflexões suscitadas por Vigotski. No sistema capitalista, o conhecimento torna o homem uma mercadoria. Ele passa a ter mais a oferecer quando vende a sua força de trabalho, torna-se mais competitivo e lucrativo para o sistema. A educação escolar atrelada ao sistema capitalista preocupa-se apenas em reproduzir conhecimentos que satisfazem às necessidades deste modo de produção e formam um tipo de homem apto a atender às exigências fragmentadoras da classe dominante.

> [...] na produção material capitalista, o conhecimento, embora seja instrumento para a confecção de um produto, está separado do trabalhador. Planejamento e execução, trabalho intelectual e trabalho manual tornam-se momentos separados. Nesse modo de produção não é necessário saber para fazer (...) (RIGON; ASBAHR; MORETTI, 2010, p. 33)

Como dissemos anteriormente, no processo educacional estão envolvidos valores sociais, políticos e econômicos que não devem ser ignorados, e aqui está um exemplo de valor que a escola vem imprimindo nos estudantes com o modelo de educação vigente, que é o de desenvolvimento de competências, não o de apropriar-se do conhecimento para transformar a realidade, como propõe Marx, mas apenas agregar valor à sua força de trabalho, formar para atuar no mercado de trabalho ao invés de formar para a vida numa educação emancipatória.

A Teoria Histórico-Cultural propõe que a educação, sobretudo a escolar, gere aprendizagens capazes de promover o desenvolvimento das funções complexas do pensamento do aluno, que vão além da aquisição de habilidades e competências, e da apresentação de conteúdos científicos, mas que lhe permite superar as condições instituídas pelo sistema alienador.

1.2 A Teoria da Atividade: atividade de estudo

Neste tópico, apresentamos a teoria da atividade que estabelece a relação entre a estrutura objetiva da atividade humana e a estrutura subjetiva da consciência, e por isso se constitui em importante orientação para a organização do ensino na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural.

Dentro da Teoria Histórico-Cultural, o psicólogo Leontiev é reconhecido pelo desenvolvimento da Teoria da atividade, a qual, segundo ele produz diferenças qualitativas no psiquismo humano. A realização de uma atividade está imediatamente ligada à satisfação de uma necessidade que leva o homem a agir sobre aquele objeto. A satisfação dessa necessidade seria o motivo da atividade. No processo de desenvolvimento histórico-social, a atividade humana foi cada vez mais sendo mediada por instrumentos ou pelos próprios homens, elaborando-se assim uma estrutura na qual a atividade coletiva é composta por ações individuais, que compõem a divisão do trabalho. Assim, a atividade é formada pelas ações que a compõe. Com essa divisão, as ações, muitas vezes deixam de ter uma relação direta com o motivo da atividade, e se não for levado em conta o conjunto das ações, estas podem até parecer que nem possuem relação com o motivo da atividade (DUARTE, 2002).

É importante salientar que o sujeito envolvido na atividade sabe o motivo de sua ação dentro do conjunto de todas as ações, ainda que ela não estabeleça relação direta ou explícita com esse motivo. À medida que as ações vão sendo realizadas, elas se aproximam do motivo ação. Do contrário essa atividade é alienadora. De acordo com Leontiev, referido por Núñez (2009), a atividade tem como componentes as necessidades e os motivos, os objetivos, as condições e os meios de seu alcance, as ações e as operações. O pressuposto fundamental da atividade é a capacidade humana de se tornar sujeito, a capacidade de construir e transformar o mundo que o rodeia, e assim a sua própria vida.

Davidov (1999) porém, adverte que não é qualquer atividade realizada em sala de aula que pode ser considerada atividade de estudo. Antes, ela deve conter os mesmos componentes identificados por Leontiev para a atividade de maneira geral (necessidades e os motivos, os objetivos, as condições e meios de seu alcance, as ações e as operações), ter caráter criativo e/ou transformador e ter um conteúdo de objeto específico, que os distingue de qualquer outra atividade (por exemplo, da atividade de jogo ou de trabalho).

Para Repkin (2003, p. 4),

> [...] o aspecto distintivo da atividade de estudo é que o seu objetivo e resultado não constituem uma mudança no objeto com o qual a pessoa opera, mas uma mudança no sujeito da atividade. Aqui reside a diferença fundamental entre a atividade de estudo e a atividade de qualquer outro tipo.

Quando o aluno é posto em atividade a partir de uma necessidade e de um motivo, de forma gradual, porém constante, ele obtém conhecimentos como resultado da transformação do objeto, e isso caracteriza uma atividade de estudo adequadamente organizada. O resultado da atividade de estudo é apresentado pelo próprio Davidov (1999, p. 2)

> Tal transformação expõe no material as relações internas ou essenciais, cuja consideração permite ao aluno da escola acompanhar a origem das manifestações externas do material assimilado. A necessidade educacional vem a ser a necessidade que o aluno da escola tem de experimentar de forma real ou mental este ou aquele material com o fim de desmembrar nele o essencial-geral do particular, com o fim de observar as suas interligações.

Os conhecimentos nesta perspectiva são denominados de “conhecimentos teóricos”, por se caracterizarem especialmente a partir da interligação lógica do conhecimento essencial-geral ao conhecimento particular dos objetos. A sua essência consiste na relação racional do homem com a realidade, na solução racional de tarefas tanto abstratas quanto também da vida prática, que exijam sabedoria para dissociar o externo e o interno, ou seja, o fenômeno, da essência.

O professor, então, é o responsável por organizar sistematicamente as atividades de sala de aula que exijam do aluno a obtenção de conhecimentos sobre o objeto por meio da experimentação com este, e assim preparar para os alunos uma autêntica atividade de estudo. Deste modo, por meio da atividade de estudo, assim caracterizada, é possível contribuir propositalmente para o desenvolvimento da consciência e do pensamento teórico, além da personalidade dos alunos. Ao contrário disso, na realização de trabalhos sem os elementos específicos da atividade de estudo e/ou sem a transformação do objeto, os alunos são empurrados pelo conteúdo dos manuais e compêndios tradicionais (DAVIDOV, 1999).

A atividade de estudo desdobra-se em tarefas de estudo, que se compõem de ações e operações, por meio das quais se resolve com êxito a tarefa. A seguir destacamos alguns aspectos da tarefa de estudo, segundo Davidov (1999):

- possui uma tal meta que, ao tentar alcançá-la, os alunos voltam-se para a análise, e depois por meio da experimentação objetiva e mental acompanham a transformação do objeto;
- a ação primordial e fundamental é a transformação pelo aluno das condições de uma tarefa que não pode ser resolvida pelos métodos que ele conhece;
- exige um tal material com o qual os alunos possam realizar as transformações correspondentes, executar a experimentação objetiva e mental;
- pressupõe uma atenção especial para com a execução plena e correta pelos alunos das ações e operações;
- ao resolver a tarefa de estudo, o aluno descobre no objeto sua relação de origem ou essencial;
- ao final, são confeccionados modelos sob a forma objetiva, gráfica ou simbólica para uma relação, somente aquela que fixa uma certa relação geral (essencial) das condições já evidenciadas na tarefa que está sendo resolvida.

Os últimos componentes da atividade de estudo são o controle e a avaliação. O controle garante ao aluno uma execução correta das ações de estudo, e a avaliação permite ao aluno determinar se houve apropriação ou não da forma geral da solução da tarefa de estudo dada, e em qual grau ela ocorreu.

Davidov (1999) alerta que o material e a forma de sua introdução no processo de estudo, nos livros e nos métodos de ensino de determinadas disciplinas, não correspondem muitas vezes às exigências do método de solução das tarefas de estudo, da atividade de estudo completa; e sugere a ação de psicólogos e outros estudiosos de didática e metodologia, a fim de superar essas inconsistências.

1.3 Processos de ensino-aprendizagem e mediação

Como já salientamos, o homem vem se constituindo ao longo da história. O aprimoramento das técnicas de trabalho é uma característica frequente em todas as etapas dessa história, desde a pedra lascada, à invenção da roda e, hoje, os robôs e a comunicação virtual.

Para a teoria marxista, o trabalho é a atividade promotora, por excelência, do desenvolvimento humano e cultural. Rigon, Asbahr e Moretti (2005, p.16) corroboram: “O homem cria necessidades que têm por objetivo não apenas garantir sua existência biológica, mas, principalmente, sua existência cultural.”

Paralelamente ao desenvolvimento dessas técnicas, ocorreu o desenvolvimento da linguagem articulada, oral e escrita, consequentemente a criação dos símbolos e signos, o processo de internalização de significados, a formação da consciência e a transformação do psiquismo. Com esses exemplos, e sob o olhar da Teoria Histórico-Cultural é possível concluir que existe um movimento dialético do mundo exterior para o mundo interior, que impulsiona o desenvolvimento das capacidades especificamente humanas, que, para além das necessidades biológicas, comuns a homens e animais, estão postas como necessidades culturais. Assim o homem estabelece leis e princípios éticos, políticos, religiosos, econômicos, regras de convivência, costumes e valores que orientam as novas ações individuais e coletivas, por meio dos significados e sentidos que atribui às suas ações e aos objetos.

Nesse contexto, Bernardes (2010, p. 357) interpreta que

> Os signos e os instrumentos, como construção elaborada historicamente pelo próprio homem, assumem a finalidade comum de serem mediadores no processo de apropriação da realidade e, ao mesmo tempo, criam condições para a transformação da natureza. Os signos orientam a transformação da atividade interna e os instrumentos orientam a transformação da atividade externa ao homem.

Podemos ainda evidenciar: o instrumento medeia a relação sujeito-objeto, já o signo medeia a relação sujeito-sujeito. Os signos são instrumentos psicológicos que regulam os pensamentos, as ações e as relações humanas. Assim, o desenvolvimento psicológico é mediado pelos signos, que desencadeiam o desenvolvimento das funções psicológicas complexas ou superiores (memória, atenção, percepção, abstração, comparação, etc.). Bernardes (2010), citando Rivière, considera a mediação como a unidade de construção da consciência.

A escola, por sua vez, tem papel fundamental nesse desenvolvimento, uma vez que é preferencialmente nela que se tem contato com os signos utilizados para a escrita, leitura e construção do conhecimento, dentre eles, o matemático. A compreensão de conceitos científicos está ligada à compreensão do significado das palavras. “Para o ensino que desenvolve o ser humano como um todo é necessário que o socialmente significativo se torne pessoalmente significativo” (ARAÚJO, 2013, p. 27).

Outra característica marcante da ação tipicamente humana é a intencionalidade, que está presente na atividade do homem até mesmo nas necessidades puramente biológicas. Vejamos: ao se alimentar o homem tem a necessidade de não ter mais a sensação desagradável de fome (o que também acontece com os animais), mas para isso seleciona dentre os alimentos disponíveis, aqueles que vão lhe proporcionar a sensação de saciedade. Assim escolhe entre alimentos doces, salgados, azedos, amargos, naturais, industrializados, calóricos, *diet* e etc, porque tem uma intenção por trás da ação, ingerir os alimentos. Claro que estamos falando do uso dos alimentos com a finalidade que foi convencionada pela coletividade. Não se incluem os casos de distúrbios, em que se utilizam os alimentos na tentativa de mascarar outras necessidades.

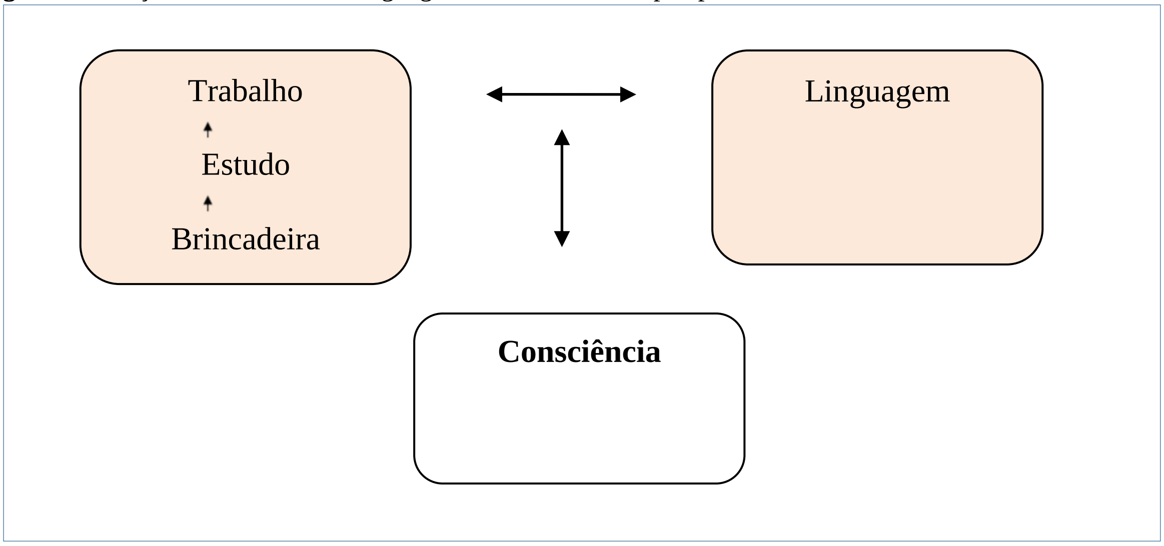
O movimento da consciência carregado de intencionalidade de atingir um objetivo impele o homem a agir de forma a satisfazer o que foi planejado. Dessa forma, o trabalho é o elemento que medeia o desenvolvimento da consciência e o alcance de objetivos, enquanto que o sentido está ligado ao motivo que o impulsiona.

De acordo com Rigon, Asbahr e Moretti (2005, p. 20) “não é possível compreender a atividade humana sem sua relação com a consciência, pois essas duas categorias formam uma unidade dialética". A consciência é também um produto das relações sociais.

Assim, o ser humano compreende e significa o mundo externo por meio da atividade de sua consciência, que lhe permite dar significado, durante a realização de suas ações cotidianas. Essa apropriação, por sua vez se dá por meio da linguagem, que assim como o trabalho é um elemento mediador da atividade da consciência e das relações humanas com o outro e consigo mesmo. A linguagem tanto permite desenvolver a consciência quanto compartilhar com os outros, o que nela se passa.

A relação entre a linguagem e a consciência está na significação construída historicamente pelos homens para cada palavra. Uma palavra carrega um significado generalizado do conjunto dos objetos que ela evoca. Delari Júnior (2013, p. 26) recorda: “Na palavra está objetivado um percurso dos conhecimentos das gerações anteriores, aos quais o escolar haverá de ter acesso, e apropriar-se da palavra é vir a dominar modos de pensar próprios do conhecimento sistemático, científico. ”

Figura 1–Relações entre trabalho, linguagem e consciência na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural



Fonte: elaboração da autora.

Esses elementos dialéticos, distintos e indissociáveis interagem constantemente, de forma a externalizar por meio do trabalho o desenvolvimento da consciência. Compreenda-se, no entanto, que a externalização do desenvolvimento da consciência, no processo educativo não pode ser mensurada objetivamente, mas pode ser percebida pelos indícios evidenciados socialmente pelos alunos e professores.

Encontra-se aí o papel do trabalho educativo: uma mediação intencional e organizada, necessária à humanização e ao desenvolvimento do sujeito, decorrente do processo de socialização, que seja capaz de colocar esse mesmo sujeito em atividade, e fazê-lo sujeito da atividade; do contrário, a aprendizagem não se efetiva.

A capacidade de colocar o sujeito em atividade é um componente relevante no processo de ensino-aprendizagem. Parece-nos que esse componente vem sendo relegado ao esquecimento, e seja causa de muitas das queixas apresentadas por parte dos educadores. Sem a necessidade do aluno de aprender, os esforços do professor para ensinar podem ser frustrados. Para Leontiev, não é suficiente ao homem ter necessidades e ter objetos que satisfaçam essas necessidades. Para ele, o fio condutor entre necessidade e objeto chama-se “motivo”. Os motivos, como a própria palavra diz, é aquilo que nos move para a satisfação de uma necessidade.

Muitas vezes desenvolvemos atividades para as quais não estamos conscientes dos reais motivos. Os motivos, assim como já dissemos sobre as necessidades, são fruto da experiência sociocultural. A realização de ações dotadas de motivos torna esse conjunto de ações uma atividade, ao mesmo passo que um conjunto de ações sem motivo denomina-se apenas operações. Assim, ela é um sistema que envolve objeto e motivo, e é desenvolvida por ações individuais com objetivos definidos. As ações são realizadas por meio de operações que são os procedimentos para realizar a ação, que por sua vez, dependem das condições. As condições são o conjunto de situações do contexto social, no qual a ação se realiza.

Dentre os quesitos que compõem a atividade, a primeira condição é a “necessidade”. Ela funciona como força interna para a realização da atividade, embora precise de um objeto, que pode ser um do universo de muitos, que lhe satisfaça. Descoberto, o objeto torna-se motivo da atividade. Já os “meios” correspondem aos instrumentos que medeiam as operações, e podem ser materiais ou simbólicos. E por fim, o produto é o resultado da transformação material ou mental sobre o objeto.

Longarezi e Franco (2013) asseguram que a atividade só se caracteriza quando esses três componentes estruturais se unem: necessidade, objeto e motivo. Segundo elas, esse processo marca o início da transição da atividade do nível material para o nível psicológico.

Por fim, há que se considerar que faz parte dos objetivos do ensino despertar no aluno o desejo de querer aprender, mas há que se considerar também as condições concretas e particulares da aprendizagem, geradas pela vida em sociedade, e que não dependem exclusivamente do professor. Como já dissemos em momento anterior, o valor que é atribuído pela família como célula da sociedade e pelo grupo social em que o estudante circunda, e as múltiplas influências que recebe no convívio social, inclusive, econômicas e políticas, refletem em sua disposição para aprender. Do ponto de vista da Teoria Histórico-Cultural, trata-se da influência determinante da dimensão interpsíquica na dimensão intrapsíquica (Bernardes, 2010).

Nesse sentido, Libâneo (2014, p. 15) complementa:

> Há, pois, uma relação entre o desempenho escolar e as práticas das quais os alunos participam, o que significa dizer que a aprendizagem (incluindo o êxito ou insucesso das aprendizagens) está influenciada pela interação entre os alunos e as práticas socioculturais que vivenciam na família, nas relações correntes no local em que vive, nas escolas. Ou seja, crianças e jovens estão na escola para adquirir competências para a vida adulta, como ler e escrever, contar, etc., de modo que o papel da escola é integrar os conceitos científicos com os conceitos cotidianos trazidos de casa e do meio social, elevando os conceitos cotidianos a um patamar mais elevado de desenvolvimento cognitivo.

A escola, por sua vez, é esse espaço propício, instituído socialmente para o desenvolvimento do ser humano através do trabalho educativo. O desenvolvimento no contexto escolar oportuniza o surgimento de novas formações mentais (percepção, representação, imaginação, memória lógica, atenção, concentração, raciocínio lógico, pensamento teórico, etc.) que vão sendo aprimoradas ao longo da vida do estudante e se traduzem em mudanças qualitativas na vida psíquica do aluno.

O desenvolvimento do pensamento teórico, de acordo com a Teoria Histórico-Cultural, possui determinadas características que só podem ser perseguidas no ambiente escolar, diferentemente do pensamento empírico, que pode ser desenvolvido através de experiências cotidianas.

1.4 Conceitos espontâneos e conceitos científicos

As tarefas de ensinar e de aprender ainda representam um desafio para estudiosos de todo o mundo. O que e como ensinar, por que e para que aprender são questões recorrentes na vida de quem ensina e de quem aprende. Existe uma maneira mais adequada de ensinar? O que motiva o aprendiz? Quais as suas aptidões em cada fase da vida? Por que uns aprendem e outros não? Quais os fatores que podem influenciar positivamente ou negativamente a aprendizagem? Se o aluno aprende fora da escola, qual o conhecimento que deve ser privilegiado por ela (a escola)?

Sem dúvida, é impossível transmitir aos alunos, durante os anos escolares, toda a cultura material e espiritual acumulada pela humanidade ao longo da história. Faz-se necessário selecionar conteúdos, que visam atender a uma expectativa de formação de indivíduos em um determinado grupo. Por exemplo, *a priori*, não faz sentido formar agricultores numa localidade onde não há condições de cultivo. Por outro lado, a identificação e seleção dos conhecimentos a ser ensinados e a forma de abordá-los exigem do professor além dos conhecimentos específicos de cada disciplina, conhecimentos de didática, de psicologia da aprendizagem e especialmente de mundo. Desta forma, o bom professor será capaz de orientar os alunos sobre o que aprendem, como aprendem e o que podem fazer com esse conhecimento.

Hedegaard e Chaikin (2005) nomeiam essa ideia como “duplo movimento do ensino”, na qual defendem que as ações de ensino devem articular o conhecimento local e cotidiano dos alunos, vivenciados na comunidade, aos conhecimentos teórico-científicos das disciplinas para despertar nos alunos o interesse e a motivação para aprender mais, e da mesma forma organizar as ações de ensino em vista de integrar o conhecimento teórico-científico ao conhecimento cotidiano e local, o que favorece o desenvolvimento dos processos mentais e possibilita a aplicação do conhecimento em situações concretas de sua vida.

Assim, de acordo com a Teoria Histórico-Cultural, existem dois estágios do pensamento: estágios inferiores onde se localizam os conceitos espontâneos e estágios superiores onde se localizam os conceitos científicos, que estão inter-relacionados e fazem parte da sistematização do processo de aprendizagem, porém através da educação escolar, os conceitos científicos superam os conceitos cotidianos (VIGOTSKI, 2010).

Os conceitos espontâneos, também chamados de conceitos cotidianos ou conceitos empíricos, são conhecimentos que a criança já possui até mesmo antes de ingressar na escola. Seu desenvolvimento acontece por meio de sensações e experiências da criança em diferentes situações e espaços sociais. De acordo com a Teoria Histórico-Cultural, eles são formados no contexto da experiência sensorial, da brincadeira, do desenho, da imitação, etc; atividades estas que exigem uma intervenção pedagógica específica, que geralmente acontece nos primeiros anos da pré-escola.

Já nos estágios superiores, estão os conceitos científicos, no qual a criança deixa de usar exemplos particulares e consegue generalizar fenômenos e atribuí-los a grupos; consegue identificar um sistema de características essenciais de uma classe de objetos. A Teoria Histórico-

Cultural entende que o real papel da escola é o de atrair e oferecer ao aluno uma orientação pedagógica capaz de estimulá-lo a desenvolver ações mentais que permitam a formação dos conceitos científicos e do pensamento teórico; conhecimentos estes que não têm condições de serem desenvolvidos fora do ambiente escolar. Entende também que a intervenção do professor junto ao aluno é fundamental para a construção desse tipo de conceito.

Sobre a formação de conceitos, Davidov (1988, p. 128), explica, “[...] Ter um conceito sobre um ou outro objeto significa saber reproduzir mentalmente seu conteúdo, construí-lo. A ação de construção e transformação do objeto mental constitui o ato de sua compreensão e explicação, o descobrimento de sua essência [...]”.

As ações mentais que atuam na formação dos conceitos são decorrentes da atividade prática. Nessa perspectiva, Araújo (2013, p. 151) ilustra:

> Se outrora, o homem, diante da necessidade de retirar um ou vários objetos de um determinado conjunto, realizou a ação por meio objetal, essa ação quando se torna mental prescinde do objeto, passa a existir na forma de conceito, pela palavra. Quando os recursos sensoriais que o homem dispunha não foram mais suficientes para os problemas cognitivos e práticos, surge a necessidade objetiva de resolvê-los em outro nível, que não apenas no das sensações e percepções, mas no do pensamento abstrato.

Dado que nosso interesse está focado no ambiente escolar, e, por isso, nos conceitos científicos, especialmente no que tange à álgebra, o desenvolvimento destes implica no desenvolvimento do pensamento teórico, que é uma das funções psíquicas superiores. As funções psíquicas superiores (pensamento teórico, memória lógica, atenção voluntária, etc.), por sua vez, concretizam-se no processo de desenvolvimento social, na relação com o outro, diferentemente das funções psíquicas elementares (movimentos, reações, etc.) que amadurecem natural e biologicamente junto com o próprio indivíduo.

O desenvolvimento do pensamento teórico, de acordo com a Teoria Histórico-Cultural, possui determinadas características que só podem ser perseguidas no ambiente escolar, diferentemente do pensamento empírico, formado por meio de experiências cotidianas.

Porém, Araújo (2013) discorrendo sobre o que escreveu Rubinstein, notável psicólogo e considerado como um dos criadores da Teoria da Atividade, juntamente com Leontiev, explica que a formação de conceitos nos remete a conceitos de objetos sociais, o que quer dizer, objetos estabelecidos nos conceitos. “Isso significa romper com a perspectiva do formalismo lógico no qual a operação com conceitos se realiza isoladamente do objeto correspondente, ficando presa à definição de termos", e por isso parecer dissociada da vida cotidiana.

Em relação a isso, esclarecem Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 18):

> Os conceitos algébricos, na condição de conceitos científicos (...) têm uma linha de desenvolvimento diferente dos conceitos espontâneos. Dificilmente serão apropriados pelas vias de formação do pensamento empírico, pois não se sustentam em características visíveis e palpáveis. É necessário compreender os conceitos algébricos dentro de um sistema de conceitos inter-relacionados, atribuindo significado aos seus símbolos, compreendendo os processos de generalização realizados.

Segundo Talizina (2000), o desenvolvimento do pensamento teórico favorece o processo de formação de outras funções superiores, como por exemplo, a atenção voluntária e a memória. Favorece o surgimento de novas aptidões e novas funções psíquicas.

Assim, associado à aquisição do conhecimento, o sujeito acaba por transformar-se a si mesmo, resultando em modificações significativas no seu desenvolvimento integral. A habilidade de realizar mentalmente uma determinada transformação num objeto foi nomeada por Galperin (2001) como ação mental. Longarezi e Puentes (2013) recordam que, na tradição da Teoria Histórico-Cultural, produzir conceitos significa produzir conhecimentos científicos em unidade com as ações mentais (análise, síntese, abstração, generalização) que constituem a base dos conceitos produzidos. Desse modo, a formação dos conceitos depende da habilidade de realizar ações mentais tais que sejam capazes de transformar o objeto em algo conhecido; conhecer sua essência.

Finalizamos esta breve exposição com um trecho escrito por Vigotski (2007), no qual ele evidencia a importância e a relação entre os conceitos espontâneos e científicos:

> O conceito científico, por ser científico, implica certa posição no sistema dos conceitos que determina sua relação com os demais conceitos. A essência de todo conceito científico foi definida agudamente por Marx: 'se a forma de manifestação e a essência das coisas coincidissem, toda ciência seria supérflua. ' O conceito científico seria desnecessário se refletisse o objeto em sua manifestação externa, como faz o conceito empírico. Por isso, o conceito científico pressupõe necessariamente a existência de relações entre os conceitos, isto é um sistema de conceitos. Nesse sentido, poderíamos dizer que qualquer conceito deve ser tomado junto com o todo o sistema de suas relações de generalidade, que determina seu próprio grau de generalidade, assim como uma célula deve ser tomada junto com todas as suas ramificações, através das quais se entrelaça com o tecido geral. (VIGOTSKY, 2007, p. 319).

1.5 Significado e sentido

Na investigação sobre o processo de ensino-aprendizagem de conceitos, sob o olhar da Teoria Histórico-Cultural, é fundamental rejeitar as análises baseadas em elementos isolados, mas, ao invés disso, buscar analisar unidades – recorte que conserva as propriedades do todo que se pretende investigar. Neste trabalho, tomamos como uma das unidades de análise o “significado”.

O significado, como produto da cultura humana é historicamente desenvolvido e permite ao sujeito internalizar, interpretar e dominar as demais criações culturais. Por meio dos sistemas de signos, sobretudo a linguagem, o homem se apropria dos significados do que existe em seu redor, formando novas conexões no cérebro. A linguagem, que carrega o significado como seu componente, é capaz de comunicar e organizar o pensamento, registrar e compartilhar conhecimentos, e influenciar internamente ao próprio homem, e externamente ao outro.

Segundo Vigotski (2010), o som e o significado são dois elementos unificados no signo, e não devem, de maneira alguma, ter seu estudo realizado de forma separada ou decomposta em elementos, sob o risco de esterilidade.

> Esta pode ser qualificada como análise que decompõe em unidades a totalidade complexa. Subentendemos por unidade um produto da análise que, diferente dos elementos, possui todas as propriedades que são inerentes ao todo e, concomitantemente, são partes vivas e indecomponíveis dessa unidade [...] Achamos que essa unidade pode ser encontrada no aspecto interno da palavra: *no seu significado*. (VIGOTSKI, 2010, p. 8)

Cada palavra refere-se a uma generalização ou conceito, a um conjunto de objetos, e o significado é parte inalienável da palavra, ele pertence tanto ao reino da linguagem quanto ao reino do pensamento. O significado é um traço indispensável da palavra, é a palavra vista no seu aspecto interior; enquanto que a palavra é a expressão externa do pensamento, é a sua veste; na palavra o pensamento se realiza. Vigotski (2010) compreende que só uma noção adequada da natureza psicológica da palavra pode nos levar a entender a possibilidade do desenvolvimento da palavra e do seu significado.

Góes e Cruz (2006), ao resumir a exposição de Vigotski em relação ao pensamento e à palavra esclarecem que o autor rejeita a tendência que procura investigar o processo de formação do conceito por meio da definição verbal, porque essa se equivoca ao omitir o material sensível ao qual a palavra se relaciona, e também rejeita aquela que omite a participação da palavra, porque esta se restringe às respostas frente ao material sensível. As autoras concluem que “ele recusa desse modo, tanto a identificação entre o pensamento e a linguagem, implicada no método da definição verbal, quanto a interpretação de que o conceito é produto do raciocínio lógico, sem a participação da palavra, o que simplifica o processo de abstração.” (GÓES; CRUZ, 2006, p. 33). Elas ainda interpretam que, no uso que faz da palavra, durante a comunicação, a criança obtém um resultado bastante semelhante ao dos adultos, mas por meio de operações intelectuais diferentes. Ainda que os adultos apresentem às crianças as pautas de generalização e de transformação do significado da palavra, a própria criança os elabora segundo seu modo de pensar, porque ainda não tem apreensões que lhe permita apropriar-se dos modos de pensar dos adultos. Por isso, o sentido das palavras é fundamental para a compreensão da dinâmica dos significados, pois o sentido é o significado interior que a palavra tem para quem está falando.

Desta forma, Vigotski explica que o significado se desenvolve e se modifica à medida que a criança precisa utilizar aquela palavra, que sempre é uma generalização, em uma nova situação. Por isso, quando a criança aprende uma nova palavra o processo de desenvolvimento está apenas começando.

> Inicialmente, a criança não diferencia o significado verbal e o objeto, o significado e a forma sonora da palavra. No processo de desenvolvimento, essa diferenciação ocorre na medida em que se desenvolve a generalização, e no final do desenvolvimento, quando já encontramos conceitos verdadeiros, surgem àquelas relações complexas entre os planos decompostos da linguagem a que já nos referimos (VIGOTSKI, 2010, p. 421)

No primeiro momento a criança estabelece relações baseadas em experiências concretas e nos fatos, de maneira sensorial e por meio da percepção, e à medida que se desenvolve, estabelece relações abstratas e lógicas, descoladas dos objetos. Por essa teoria, o significado desenvolve-se junto com a criança em seu processo de formação histórica.

Igualmente, os significados estão atrelados a um contexto, que lhe confere mais significado ao adquirir uma variedade de zonas preenchidas por um novo conteúdo; ou menos significado do que quando tomado isoladamente, por limitar e restringir o que a palavra significa num determinado contexto. “Esse enriquecimento das palavras que o sentido lhes confere a partir do contexto é a lei fundamental da dinâmica do significado das palavras”. (VIGOTSKI, 2010, p. 465)

Nesse sentido, Vigotski (2010, p. 466) entende que “a palavra só adquire sentido na frase, e a própria frase só adquire sentido no contexto do parágrafo, o parágrafo no contexto do livro, o livro no contexto de toda a obra de um autor”. E, citando Paulham, em seu texto ele diz que o sentido de uma palavra nunca é completo, depende da compreensão do mundo e da estrutura interior do indivíduo.

Diante da tarefa da escola de proporcionar a aprendizagem dos conceitos científicos, o significado e o sentido assumem papel primordial, pois esse processo de construção deve ser considerado para favorecer a apropriação do conhecimento pelos alunos, na medida em que os contextos são ampliados.

1.6 Ensino-aprendizagem de álgebra

Está enraizada em nossa cultura a ideia de que poucas pessoas têm afinidade com a matemática, e muito menor ainda é o número daqueles que dominam esses conhecimentos. Entendemos que a aprendizagem se efetiva, quando existe significado naquilo que se busca aprender, o que nos parece faltar em quase todo o percurso da vida escolar, sobretudo, no que tange à apreensão de conceitos matemáticos.

Pela nossa própria experiência, pela experiência dos colegas que partilham conosco e também pelos resultados e constatações apresentadas nas produções acadêmicas na área, como as de Sousa, Panossian e Cedro (2014), Lins e Gimenez (2001), Fiorentini *et al* (1992), nós, professores, temos empreendido grande esforço em ensinar a simbologia própria da álgebra, mas o símbolo está vazio de significado e não produz a aprendizagem esperada.

Sousa, Panossian e Cedro (2014) nos apresentam consequências desse processo ao dizer que:

> Apesar do papel importante que a álgebra tem na formação dos estudantes, temos percebido que o seu ensino não tem conseguido torná-la um fator relevante para o desenvolvimento dos sujeitos. <u>Ao invés disso, a álgebra tem se tornado, quase que a fonte principal do processo de alienação dos estudantes em relação à aprendizagem dos conhecimentos matemáticos.</u> Ao ser entendida somente como uma forma de manipulação de símbolos, perde totalmente a sua relevância na vida deles, dissociando-se de suas práticas sociais (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 46,*grifo nosso).*

Um dos desafios propostos aos professores de matemática é resignificar a álgebra que ensinam aos seus alunos. Notamos que os professores estão preocupados em como transmitir os conteúdos de forma compreensível, enquanto que os alunos estão preocupados com o “para que” aprender a maioria dos conteúdos matemáticos, especialmente os que são ligados à álgebra. Temos, na maioria das vezes, nos esquecido do quando e do por que aqueles conhecimentos passaram a fazer parte da vida e da história do homem.

Como ensinam Vigotski e Leontiev, um possível caminho é que o processo histórico de sistematização dos conhecimentos deva ser evidenciado como ferramenta para a construção do significado dos conceitos, por terem sido constituídos a partir de necessidades do próprio homem, e por isso trazem em si uma finalidade.

A adoção da construção lógico-histórica do conceito como método de ensino poderá ser capaz de atender às inquietações dos alunos sobre o "para que aprender álgebra", permitindo-lhes perceber que a matemática como as outras ciências não foi "inventada" miraculosamente por alguém, mas surgiu a partir da necessidade de resolver determinada situação, e contou com avanços e retrocessos, e mais ainda: não está acabada, é passível de mudança, de reelaboração. Essa ideia nos ajudou a definir uma das unidades de análise: *construção lógico-histórica do objeto de conhecimento*: o que, quando, porque e como usar. Traçar o caminho percorrido pelo conteúdo conduzido por sua finalidade, como método de ensino.

Outro aspecto a ser levado em conta quanto ao ensino de álgebra é a potencialidade do desenvolvimento pessoal e social que seu aprendizado pode proporcionar. De acordo com MacGregor, citado por Sousa; Panossian; Cedro (2014, p. 46), o ensino de álgebra:

> Promove o desenvolvimento do pensamento por meio de atividades como a generalização e o raciocínio dedutivo; é um modo eficiente para resolver certos tipos de problemas; é um componente crucial na alfabetização matemática; é um pré-requisito para estudos matemáticos no nível superior e para alguns tipos de carreiras profissionais; e é uma parte necessária dos conhecimentos gerais que os sujeitos necessitam para viver em sociedade.

Assim, estão postas algumas justificativas para que seja dada a devida atenção ao processo de ensino- aprendizagem da álgebra.

1.6.1. Concepções de álgebra e de educação algébrica

Não existe consenso entre os estudiosos sobre o que vem a ser álgebra nem sobre a partir de quando esse conjunto de ideias é introduzido no ensino de matemática. Contudo, o pensamento algébrico (significado) perpassa os diversos campos da matemática. O pensamento e a linguagem algébrica caminham dialeticamente juntos e se fazem presentes em praticamente todas as outras áreas do conhecimento, e por isso a importância de sua plena aprendizagem.

Por outro lado, não restam dúvidas de que as concepções de álgebra influenciam na forma de ensinar, e que existe uma relação indissociável entre a forma algébrica e seu significado, porém um não se sobrepõe ao outro. A cada símbolo algébrico (linguagem) se associam conceitos e objetos de natureza diferentes (aritméticas, geométricas e mesmo algébricas). A letra "a" em uma equação qualquer não é a mesma que simboliza a aceleração em uma fórmula. Símbolo e significados, linguagem e pensamento misturam-se (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO 2014). Os símbolos são instrumentos psicológicos que regulam os pensamentos, as ações e as relações humanas, afirma Vigotski (2010). Mas, afinal, em se tratando de álgebra, as letras são incógnitas, são variáveis, são parâmetros, são símbolos abstratos? O que são afinal?

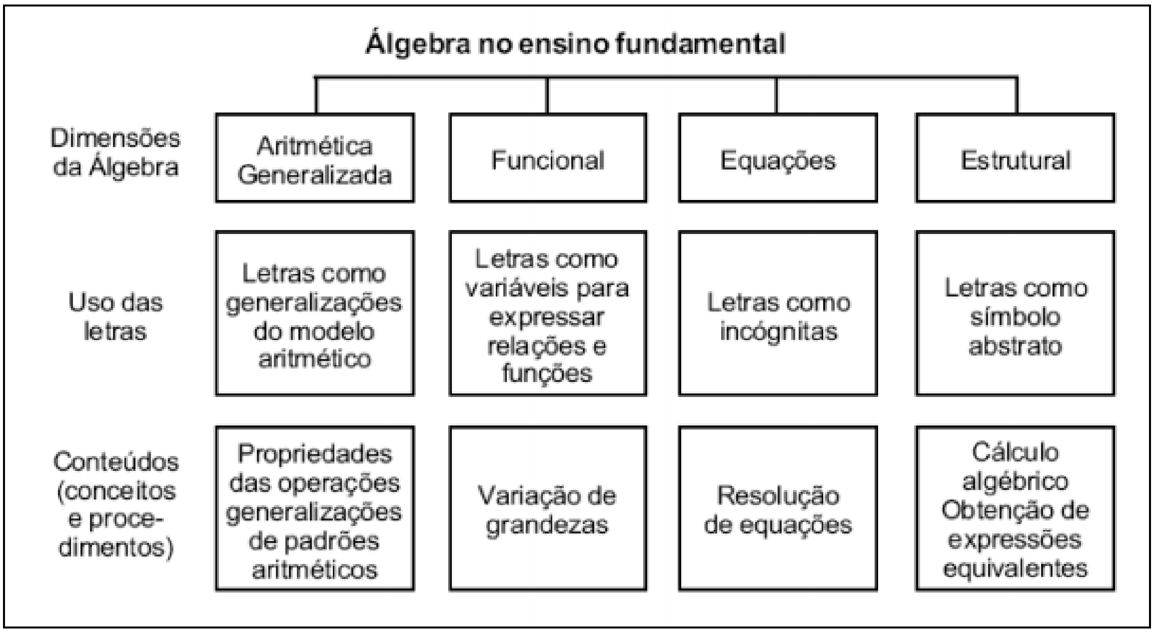
Nesta etapa do trabalho, apresentaremos as principais concepções de Álgebra desenvolvidas por educadores matemáticos, Lins e Gimenez (2001); Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Usiskin (1995) e Lee (2001), que trazem ao debate alguns pontos de vista sobre a questão.

Um dos principais problemas na aprendizagem de álgebra, citado pelos PCN (BRASIL, 1998) é a noção de variável. De modo geral, os estudantes entendem que a letra usada em uma sentença algébrica serve apenas para indicar um valor desconhecido, ou seja, para eles, a letra sempre significa uma incógnita. Não é um conceito errado, mas aponta para apenas uma das concepções da álgebra.

Desde os anos iniciais, o símbolo "☐" é utilizado para representar um valor ainda desconhecido. Apesar de não ser utilizada uma letra, esse símbolo representa uma incógnita. Vale ressaltar que mesmo que os símbolos adotados sejam letras, nem sempre elas estão na condição de números. Por exemplo, a letra *f* é frequentemente utilizada para designar uma função; a letra **v** para designar um vetor; a letra A para designar uma matriz. Em geometria, utilizamos letras para representar pontos, por exemplo, ∆ABC; em lógica utilizamos letras para representar proposições como em p ^ q (USISKIN, 1995). As variáveis, por sua vez, estão relacionadas à utilização de um símbolo que além de desconhecido pode assumir em momentos diferentes valores distintos, valores que variam.

Esses conceitos são fundamentais e imprescindíveis ao estudo algébrico. Os PCN propõem que o professor trabalhe na sala de aula com as diferentes concepções da álgebra, para tentar desmistificar equívocos, e apresenta o seguinte quadro resumo:

Figura 2–Concepções de álgebra apresentadas nos PCN de Matemática para o Ensino Fundamental



Fonte: BRASIL, 1998, p. 116 (PCN)

Observamos que o esquema proposto pelos PCN, em que as concepções/dimensões de álgebra se constituem a partir do uso que se faz das letras, aproxima-se das concepções de álgebra apresentadas por Usiskin (1995):

Quadro 1– Concepções de álgebra, conforme estudos de Zalman Usiskin (1995)

Concepção de Álgebra	Características
1) Aritmética generalizada	Essa ideia é fundamental para a modelagem matemática. As variáveis são percebidas como generalizadoras de padrões e modelos, e podem ser utilizadas para representar fenômenos de diferentes tipos. Nesta concepção a letra não é vista como incógnita e sim como variável apenas. Ex.: 1 + 7 . 2 = 7 . 2 + 1 , generalizando a + b = b + a Instruções-chave: traduzir e generalizar.
2) Procedimentos para resolver certos tipos de problemas	Prevê as letras como incógnitas, ou seja, valores desconhecidos a serem determinados. A álgebra nessa perspectiva é um recurso para resolver certos tipos de problemas e concentra a ênfase do estudo nos procedimentos operatórios. Ex.: Adicionando 3 ao quíntuplo de um número, a soma é 40, ou seja, 5x + 3 = 40. Instruções-chave: simplificar e resolver.

3) Estudo de relações entre grandezas (função como variação de duas variáveis)	As letras nessa concepção assumem a característica de variável e se apresentam através de uma relação de dependência ou independência uma das outras, ou seja, uma em função da outra. Em geral não denotam o sentido de incógnita, e sim de argumento (os valores pertencem ao conjunto domínio da função) ou parâmetro (representa um número do qual dependem outros números), de acordo com o tipo de proposição do problema. Ex.: $y = 11x - 64$ Instruções-chave: relacionar
4) Estudo das estruturas	As letras são compreendidas como símbolos arbitrários aos quais se aplicam as propriedades das operações. Não possui nenhuma semelhança com as concepções anteriormente apresentadas "Utiliza-se o cálculo pelo cálculo e valoriza-se o formalismo. " (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 24) Ex.: Fatorar $3x^2 + 4ax - 132a^2$ Instruções-chave: manipular, justificar

Fonte: Elaboração da autora, com base no texto de Usiskin (1995)

Usiskin (1995) diz que para os objetivos do texto por ele escrito, a álgebra da escola média tem a ver com a compreensão do significado das "letras" (comumente chamadas de variáveis) e das operações com elas, e considera que os alunos estão estudando álgebra quando encontram variáveis pela primeira vez. Mas ele mesmo não se dá por satisfeito com esta resposta.

Ele destaca que a tendência atual é pensar numa variável simplesmente como um símbolo pelo qual se pode substituir coisas indistintas de um determinado conjunto, ao mesmo tempo que adverte que as variáveis comportam muitas definições, conotações e símbolos. Para ele, tentar enquadrar a ideia de variável numa única concepção implica numa super simplificação que, por sua vez, distorce os objetos da álgebra. (USISKIN, 1995, p.11-12).

O autor conclui que as finalidades do ensino de álgebra, as concepções e a utilização de variáveis estão intrinsecamente relacionadas e que as finalidades da álgebra são determinadas por, ou relacionam-se com concepções diferentes da álgebra. E desse modo, essas diferentes concepções correspondem à importância relativa dada aos diversos usos das variáveis.

A seguir, apresentamos um sucinto resumo sobre os estudos realizados por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), sobre educação algébrica e suas correspondentes concepções de álgebra. Os autores apresentam as concepções de álgebra e de educação algébrica, sintetizadas no Quadro 2, a partir do percurso histórico. Em seu texto é possível depreender que as concepções apresentam certo avanço gradual de uma para as outras (ampliação), com relação à percepção do conhecimento que anteriormente vinha sendo ensinado.

Eles defendem a tese de que as concepções de educação algébrica estão marcadas negativamente pela redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica, o que consequentemente reduz o processo de ensino aprendizagem de álgebra ao transformismo algébrico.

Completam os autores que repensar a álgebra implica em repensar a relação que se estabelece entre pensamento e linguagem, a qual não é uma relação de subordinação, mas de natureza dialética. É, neste sentido, que propõem uma quarta concepção de educação algébrica, em que destacam que a linguagem é, pelo menos a princípio, tanto no plano histórico quanto no pedagógico, a expressão de um pensamento, embora este posicionamento esteja parcialmente de acordo com os pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, pois nela a linguagem é capaz de comunicar, mas também de organizar o pensamento e de influenciar internamente no próprio sujeito.

E apresentam as seguintes conclusões:

1) Existem elementos que podem ser considerados como caracterizadores do pensamento algébrico, são eles: percepção de regularidades, de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativa de expressar/explicitar a estrutura de uma situação problema e a presença do processo de generalização.
2) O pensamento algébrico é uma forma de pensamento especial, mas não exclusivo da Matemática. Ele pode se manifestar em outras áreas do conhecimento. Ele é um pensamento indispensável para a constituição do universo conceitual e temático subjacente à ciência contemporânea.
3) Existem várias formas de manifestação do pensamento algébrico: através da linguagem corrente, da linguagem aritmética, da linguagem geométrica e da linguagem propriamente algébrica.
4) É possível introduzir o pensamento algébrico desde os anos inicias, tendo em vista que ele não está necessariamente atrelado à linguagem algébrica estritamente simbólico-formal. Esta fase deve visar a percepção de regularidades e

generalizações, captar e expressar situações-problema retoricamente ou de forma semiconcisa. Porém, a seu tempo, é necessário dar a devida atenção ao ensino da linguagem formal, tendo em vista o pleno desenvolvimento da aprendizagem da álgebra.

5) A primeira etapa da Educação Algébrica deve ser a resolução de problemas e não o transformismo algébrico, como forma de garantir o exercício do pensamento algébrico e a construção de uma linguagem algébrica significativa. O conjunto de etapas propostas, que se interpenetram são: chegar às expressões simbólicas através da análise de situações concretas, partir de expressões algébricas e lhes atribuir significado e por fim o trabalho com o transformismo algébrico.

Quadro 2 – Concepções de álgebra e de educação algébrica, conforme estudos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993)

Concepção de Álgebra	Características	Concepção de Educação Algébrica	Características
Processológica	Conjunto de técnicas, processos e procedimentos sequenciais e padronizados para resolver determinados tipos de problema. Não exige uma linguagem exclusiva para subsidiar o pensamento algébrico. Nela, o pensamento e a linguagem estão dissociados.	--	
Linguístico-estilística	Linguagem rigorosa e específica, criada para expressar os procedimentos	--	--

	algébricos. Propõe a ruptura com a linguagem corrente. Distingue o pensamento da forma de sua expressão, a linguagem.		
Linguístico-sintático-semântica	Também configura a álgebra como linguagem, valoriza o significado e a relação entre os termos. Supera a concepção anterior por identificar que a dimensão semântica é o que possibilita o desenvolvimento dessa linguagem. Enfatiza que para ser linguagem necessita atender a critérios sintáticos e semânticos.	Linguístico-pragmática	A aquisição de técnicas, ainda que mecânicas, requeridas pelo transformismo algébrico seriam necessárias e suficientes para a resolução de problemas pelo aluno. Compõe-se de uma sequência de tópicos iniciados pelas expressões algébricas, seguido de operações com essas expressões e por último, a aplicação das técnicas na resolução de problemas. Essa concepção é marcada pelo não uso de figuras, ilustrações ou objetos concretos.
		Fundamentalista-analógica	Vincula o papel pedagógico da álgebra como instrumento para resolução de problemas. É marcada pela utilização de recursos geométrico-visuais, e pela justificação das passagens do transformismo algébrico por meio de recursos analógicos geométricos, considerados superiores didaticamente à abordagem lógico-simbólica, sem, porém, excluí-la.
Linguístico postulacional	Linguagem em que os símbolos representam entidades que adquirem um grau de abstração e generalidade, não se	Fundamentalista estrutural	Como a ênfase foi colocada no estudo das propriedades das operações e, consequentemente, nas estruturas algébricas, havia a crença de que o conhecimento dessas

	restringindo a entidades matemáticas quantitativas. Ex.: Estruturas topológicas.		propriedades e estruturas habilitaria o aluno a identificá-las e aplicá-las a situações em que estivessem subjacentes, o que garantiria a justificação do transformismo algébrico. O estudo de álgebra deveria ser iniciado com tópicos considerados fundamentadores, como conjuntos numéricos, propriedades, estudo dos quantificadores, sentença aberta e fechada, conjunto universo e conjunto fechado, equações e inequações e depois funções.
--		Sem designação pelos autores	Fundamentada na relação dialética entre pensamento e linguagem: esta é a proposta apresentada pelos autores, porém não recebe um título. Propõe colocar em equilíbrio o pensamento, a linguagem e os procedimentos algébricos. Baseia-se na ideia de que o pensamento algébrico pode ser expresso em várias linguagens que não só a simbólica, e por isso pode ser introduzido no ensino desde os anos iniciais e evoluir com a formalização da linguagem própria e significativa, e por fim na realização do transformismo algébrico. Também privilegia a resolução de problemas como método.

Fonte: Elaborado pela autora, com base no texto de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993)

Outra contribuição importante com relação às concepções de álgebra foi dada por Lins e Gimenez (2001). Estes autores recordam que não há consenso a respeito do que seja pensar algebricamente, e ressaltam, como implicações dessa incerteza, a dificuldade de se organizar um currículo para a educação algébrica, de saber se os tópicos utilizados tradicionalmente são de fato tão relevantes quanto a visão atual parece indicar e se existem outros tópicos que deveriam também constar no currículo.

Quadro 3– Concepções de álgebra conforme estudos de Lins e Gimenez (2001)

Concepção de Álgebra	Características
Letrista	Cálculo com letras. A álgebra é caracterizada pelo uso de determinadas notações, e são apresentadas aos alunos na sequência “algoritmo”/”exercícios” ou seja técnica/prática.
Letrista Facilitadora	Acreditam que o uso de material concreto/manipulativo ajudará a formalizar as estruturas algébricas. Ex: Uso de áreas para ensinar produtos notáveis, e balança de dois
Modelagem matemática	Ocorre à medida em que a produção de conhecimento algébrico serve ao propósito de iluminar ou organizar uma situação concreta, onde o concreto é assumido como real ou realista e não necessariamente
Aritmética generalizada	A atividade algébrica se caracteriza pela expressão de generalidade.

Fonte: Elaborado pela autora, com base no texto de Lins e Gimenez (2001)

Os autores lamentam ser a concepção letrista a que geralmente é encontrada nos livros didáticos. Acrescentam que essa postura não se baseia em investigação ou reflexão alguma, apenas está baseada na tradição. Ao contrário, porém, estudos comprovam a ineficácia dessa abordagem, e até mesmo seu caráter pernicioso para a aprendizagem. E denunciam a falta de preparo dos professores, que não conhecem outras alternativas, ou que simplesmente seguem o que o livro traz.

Afirmam também que estudos apontam que os alunos não conseguem ver a relação entre o trabalho com objetos concretos e a linguagem formal da álgebra, defendida pela concepção facilitadora (Quadro 3). Com relação à concepção de álgebra como aritmética generalizada, os autores consideram que, de certa forma, esta compensa a concepção letrista, já que a álgebra é vista como meio de expressão e não apenas como objeto a que se aplicam técnicas diversas.

Assim como Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (2001) estão de acordo que a introdução do ensino de álgebra na escola tem sido realizada tardiamente. Para estes, a própria atividade aritmética envolve, naturalmente, certo nível de generalidade. Dessa forma, a questão seria decidir sobre começar pela aritmética ou pela álgebra, decisão que até o momento vem sendo tomada tendo por base apenas a tradição. O caminho apontado é entender de que modo álgebra e aritmética se ligam; o que elas têm em comum.

Por fim, apresentamos um resumo das concepções de álgebra, segundo Lesley Lee (2001), encontradas no estudo realizado por Figueiredo (2007), em sua tese de doutorado.

Quadro 4 – Concepções de álgebra conforme Lee (2001).

Obra e universo de estudo	Concepções de Educação Algébrica	Predominâncias no ensino	Ênfases quanto à relação entre linguagem e pensamento algébricos
Lee (2001): Síntese de estudo histórico internacional de pesquisas que enfatizam algumas das seis concepções citadas	1. Como Linguagem	Desenvolver a comunicação em uma linguagem algébrica. Exercícios que permitam a evolução da linguagem da Álgebra elementar.	Na relação entre a linguagem e pensamento Algébricos.
	2. Como Caminhos de Pensamento	Pensamentos sobre relações matemáticas em lugar de objetos matemáticos Exercícios que envolvem questões de raciocínio sobre padrões e controlar mentalmente o desconhecido, invertendo e desfazendo novamente as operações.	Na relação entre a linguagem e pensamento Algébricos.
	3. Como Atividade	Modelo de construção da atividade. Exercícios que envolvem modelagem matemática e pensamentos sobre relações matemáticas em lugar de objetos matemáticos.	Na relação entre a linguagem e pensamento Algébricos.
	4. Como Ferramenta	Resolver problemas de modo a veicular e transformar mensagens, seja a serviço de outras ciências, modelando as situações, ou a serviço da própria Matemática.	Na relação entre a linguagem e pensamento Algébricos.
	5. Como Aritmética Generalizada	Variedade de visões: - Álgebra das generalizações dos números; - Álgebra como estudo das estruturas da Aritmética; - Álgebra como estudo de expressões simbólicas com letras, sem atentar para o significado desses símbolos.	Na relação entre a linguagem e pensamento Algébricos.
	6. Como Cultura (envolve valores, crenças, práticas, tradições históricas e processo para sua transmissão)	As atividades requerem as ferramentas e o pensamento algébrico é criado. A linguagem de comunicação é a algébrica. Entrelaça o currículo da Álgebra com o da Geometria (visão histórica).	Na relação entre a linguagem e pensamento Algébricos.

Fonte: FIGUEIREDO, 2007, p. 68.

Dada a diversidade de concepções de álgebra e de educação algébrica e sua repercussão sobre o processo de ensino aprendizagem, essas concepções serão tomadas como categoria de análise neste trabalho.

2 – FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS E CONTEXTUALIZAÇÃO

Ao longo da realização desse estudo, passamos a compreender que o objetivo e motivo da educação escolar é proporcionar à humanidade a oportunidade de continuamente aprimorar suas condições de existência, tendo sempre em vista a construção de um mundo melhor.

Sabendo que os conceitos algébricos perpassam os diversos campos da matemática, que ela se relaciona com tantas outras ciências, e por isso a necessidade de seu real aprendizado, tomamos como ponto de partida, diversos fatores que incidem sobre o processo de ensino-aprendizagem de álgebra, e que contribuem para o seu sucesso ou fracasso. Buscamos analisar alguns desses fatores no livro didático de matemática, porém sem perder de vista o contexto no qual esse trabalho se desenvolve. Por isso, nesse capítulo apresentamos a metodologia, o contexto da Rede Municipal de Educação de Uberaba, o contexto das políticas públicas educacionais para o livro didático - o PNLD, a álgebra nos PCN e na matriz curricular do município.

2.1 Metodologia

Ao dedicarmos nossa atenção ao delineamento da pesquisa, ao interesse pelo tema, ao problema, à metodologia, às ações necessárias para concretizar a investigação, inclusive a análise e interpretação dos dados, percebemos o valor, a influência e coerência necessária, entre os pressupostos metodológicos e as concepções de ser humano, de sociedade, de mundo e de educação que estão aí envolvidas, portanto, a indissociabilidade entre fundamentos teóricos e metodológicos.

Essa coerência justifica-se até mesmo como critério de validade do conhecimento elaborado por meio da investigação a que nos propomos. Essa coerência e rigor científico estiveram presentes na construção da teoria psicológica e pedagógica inaugurada por Vigotski. Para ele não bastava que a psicologia fosse construída por meio da justaposição de citações extraídas dos clássicos do marxismo, nem por métodos fundamentados em pressupostos filosóficos contraditórios ao materialismo histórico dialético.

Conforme sinaliza Gil (2008), o materialismo histórico-dialético, devido ao seu alcance, pode, ele mesmo ser designado como método e procedimento científico. Esse método contém em si três grandes princípios: a contradição, relação qualidade/quantidade e a superação De maneira semelhante, os pesquisadores que adotam a Teoria Histórico-Cultural como pressuposto teórico têm feito relevante esforço no sentido de garantir que as pesquisas realizadas à luz dessa teoria, e que necessitem recorrer a outros recursos, utilizem métodos de obtenção de dados e fundamentação teórica que não sejam contraditórios aos princípios do marxismo e consequentemente da própria Teoria Histórico-Cultural.

Bernardes (2010, p. 348) explica o objetivo do materialismo histórico dialético enquanto método.

> Estes pressupostos teórico-metodológicos visam à superação das condições instituídas na realidade para além da crítica aos elementos próprios da sociedade, buscando identificar, na historicidade dos fenômenos estudados, as condições necessárias para que a potencialidade do gênero humano se objetive na individualidade dos sujeitos. Assim, o estudo da conduta do homem vincula-se diretamente às condições objetivas criadas pela vida em sociedade. *(grifos nossos)*

É nessa perspectiva que buscamos analisar o ensino de álgebra nos livros didáticos, na tentativa de superar as condições atualmente instituídas, não pela crítica aos elementos, mas com vistas à possibilidade de identificar no movimento histórico as condições necessárias para que os estudantes se apropriem da potencialidade do conhecimento algébrico em seu desenvolvimento enquanto sujeitos. Sabemos que esta tarefa está vinculada às condições objetivas em que se realiza o processo de ensino-aprendizagem, e que dentre elas está a organização do ensino pelo professor.

Outro importante pressuposto teórico que trazemos da Teoria Histórico-Cultural é o método genético, proposto por Vigotski (1991; 2010), que consiste no estudo do psiquismo em sua gênese, desenvolvimento e evolução. Por esse método o psicólogo russo propõe que o conhecimento verdadeiro se baseia na explicação de sua causa, de como algo é produzido e não dos seus efeitos, e por isso chamou-o de método genético. Nele, analisam-se os processos, as relações e não os objetos; as causas, os nexos internos e não as aparências, os nexos externos, porém sem ignorá-los. Busca-se também estudar os comportamentos “fossilizados” através da reconstituição de sua gênese.

Vigotski (1991) deixa claro que o método investigativo na Teoria Histórico-Cultural se faz por meio da explicação do fenômeno em substituição à descrição do mesmo, e, assim, foi interpretado por Bernardes (2010, p. 355): “A substituição da descrição pela explicação fundamenta-se na característica da lógica dialética que procura a essência do conceito por meio das suas características internas e não das características perceptíveis, aparentes”, sem, no entanto desprezar as características externas, mas subordina-as à descoberta de sua origem real, ou seja, à sua essência.

Para a Teoria Histórico-Cultural, estudar algo historicamente significa estudá-lo em movimento. Trata-se de um processo ao longo do tempo, que compreende mudanças, e é composto de etapas, de avanços e retrocessos, é um movimento de transformação. Numa dissertação de mestrado, esse tempo é restrito, porém, consideramos que cada estudo realizado contribui para a explicação do objeto.

A presente pesquisa apresenta uma abordagem qualitativa, que se coaduna com o método histórico dialético. Quanto ao delineamento da pesquisa, conforme enfatiza Gil (2008), pode ser classificada como bibliográfica e documental. A pesquisa documental e a bibliográfica são bem próximas – o que as diferencia é a natureza das fontes. Enquanto na pesquisa bibliográfica, fazemos uso de fontes secundárias, recorrendo às contribuições de diferentes autores que tratam da temática estudada, na pesquisa documental, vamos a fontes primárias, ou seja, a materiais que ainda não receberam tratamento. Esta última requer uma análise mais cuidadosa, pois os documentos não passaram, ainda, por tratamento. (SÁ-SILVA; ALMEIDA; GUINDANI, 2009).

Neste estudo, valemo-nos da pesquisa bibliográfica para fundamentá-lo teórica e metodologicamente, recorrendo a livros, artigos e teses. E da pesquisa documental, porque consideramos o livro didático como um documento histórico, produto das relações socioculturais, e, no caso, deste estudo, ainda, não investigados na perspectiva em que o fizemos.

Na perspectiva da análise documental, conforme nos apresenta Gil (2008), adotamos os seguintes procedimentos: seleção dos documentos, no caso, os livros; exploração do material, preparação do material para a análise, escolha das unidades de análise; pré-análise; inferência e interpretação, que serão apresentados no Capítulo III.

Como já dissemos, os diferentes métodos de pesquisa visam atender às necessidades das diversas áreas do conhecimento, que, por sua vez, possuem diferentes concepções de ser humano, de sociedade, de organização, de desenvolvimento, de mundo, de educação, etc. Em nosso caso, poderíamos citar inúmeras contribuições de pesquisadores interessados em investigar o livro didático, mas como já dissemos em momento anterior, para além do estudo do livro didático, queremos estudar a álgebra que é ensinada através desses manuais, sob o olhar da Teoria Histórico-Cultural.

Santos e Gatti Jr. (2009), em seus estudos sobre história da educação, especificamente sobre os caminhos da Educação Matemática, concluem que as pesquisas relativas à

Matemática Escolar, diferentemente de outras disciplinas são relativamente recentes, pois anteriormente, essa disciplina, para os historiadores das matemáticas, nada mais era do que um subproduto das matemáticas eruditas.

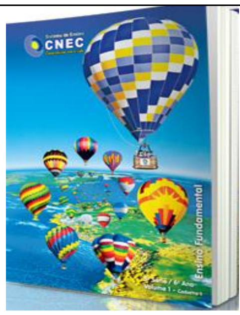
Corroborando com Figueiredo (2007), apresentamos as hipóteses para as dificuldades de aprendizagem dos estudantes dos anos finais do ensino fundamental com relação ao ensino de álgebra:

1) As concepções de álgebra que eles próprios possuem e também às que recebem de seus professores, desde os anos inicias;
2) Os processos cognitivos necessários à sistematização da linguagem algébrica e do pensamento algébrico

O olhar da Teoria Histórico-Cultural concebe que a apropriação do conhecimento é um processo histórico, dialético e complexo, em que elementos distintos se relacionam formando unidades que se interagem e se conectam de tal forma que é impossível fragmentá-las para isolá-las e assim estudá-las. Para elucidar essa compreensão, Vigotski (2010) usou como exemplo a composição química da água em hidrogênio e oxigênio: cada elemento por si (oxigênio e hidrogênio) não possui as propriedades da água e ao mesmo tempo possuem propriedades que não existem na água. Por exemplo, a água apaga o fogo, porém o hidrogênio é inflamável. Assim, para a psicologia o pensamento não pode ser decomposto em pensamento e linguagem para serem estudados separadamente, porque suas propriedades não serão as mesmas.

Os materiais que foram analisados são indicados a seguir:

Figura 3 – Materiais didáticos analisados por período

OBRA	PERÍODO DE UTILIZAÇÃO	CAPA
SISTEMA DE ENSINO CNEC. Ensino Fundamental. Matemática. 8º ano. Uberaba: Editora e Gráfica Cenecista Dr. José Ferreira, 2013. (Volumes 1 a 3).	2011 - 2013	
SOUSA, Joamir Roberto de; PATARO, Patrícia Rosana Moreno. **Vontade de saber matemática.** 8º ano. 2ª ed. São Paulo: FTD, 2012.	2014 - 2016	

Fonte: elaboração da autora.

Ressaltamos que os materiais didáticos citados na Figura 3 referem-se a um livro didático e a uma apostila, tendo em vista as diferenças e semelhanças apontadas por Câmara (2012), embora este último esteja identificado em sua capa como "caderno". Neste trabalho, adotaremos o termo *livro didático* para igualmente designá-los, exceto em momentos em que a distinção é realizada explicitamente. No item 2.2, discutiremos mais essa questão.

Para responder à problemática desta pesquisa, que é investigar, a partir das diferentes concepções de álgebra e de educação algébrica, se a abordagem proposta nos livros escolares de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental favorece a aprendizagem de conceitos algébricos e possibilita o desenvolvimento das funções psíquicas superiores dos estudantes, inicialmente, levantamos os conteúdos específicos de álgebra em cada um dos livros a serem analisados, o que constituiu o nosso *corpus* de análise.

As unidades de análise foram estabelecidas *a priori* com base no referencial teórico deste estudo. São elas:

UNIDADE DE ANÁLISE 1 – INTERRELAÇÃO ENTRE OS CONCEITOS**:** qualquer conceito deve ser tomado junto com o todo o sistema de suas relações de generalidade, todo-parte e parte-todo.

UNIDADE DE ANÁLISE 2 – SIGNIFICADO: a apropriação de conceitos científicos está ligada à compreensão do significado.

UNIDADE DE ANÁLISE 3– CONSTRUÇÃO LÓGICO-HISTÓRICA DO OBJETO DE CONHECIMENTO: o que, quando, porque e como usar. Traçar o caminho percorrido pelo conteúdo conduzido por sua finalidade, como método de ensino.

UNIDADE DE ANÁLISE4 – NEXOS EXTERNOS DOS CONCEITOS: reconhecimento de características externas, visíveis, palpáveis, memorização de regras, técnicas e algoritmos (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014).

UNIDADE DE ANÁLISE 5 – CONCEPÇÕES DE ÁLGEBRA E DE EDUCAÇÃO ALGÉBRICA

5.1 – Conforme concepções elaboradas por Usiskin

5.1.1Aritmética generalizada
5.1.2 Procedimentos para resolver certos tipos de problemas
5.1.3 Estudo de relações entre grandezas (função como variação de duas variáveis)
5.1.4 Estudo das estruturas

5.2 – Conforme concepções elaboradas por Fiorentini, Miorim e Miguel

5.2.1 Processológica
5.2.2 Linguístico-estilística
5.2.3 Linguístico-sintática-semântica
    5.2.3.1 Linguístico-pragmática
    5.2.3.2Fundamentalista-analógica
5.2.4 Linguístico-postulacional
    5.2.4.1 Fundamentalista estrutural

5.2.5 Sem designação pelos autores

5.3 – Conforme concepções elaboradas por Lins e Gimenez

5.3.1 Letrista
5.3.2 Letrista Facilitadora
5.3.3 Modelagem matemática
5.3.4 Aritmética generalizada

5.4 – Conforme concepções elaboradas por Lee

5.4.1 Linguagem
5.4.2 Caminhos de pensamento
5.4.3 Atividade
5.4.4 Ferramenta
5.4.5 Aritmética Generalizada
5.4.6 Cultura

2.2 O livro didático: concepções e o PNLD

Os livros didáticos fazem parte do cotidiano escolar da educação básica, de tal maneira que seus principais usuários raramente refletem sobre suas características. Porém, este mesmo livro tem suscitado interesse dos pesquisadores ligados à área de educação, nos últimos anos, o que pode ser comprovado pelo vasto número de pesquisas em torno desse instrumento.

É possível perceber nas produções e orientações a respeito do livro didático que não há uma caracterização precisa e consensual desse importante recurso didático. É, entretanto, a principal fonte de referência para grande parte dos professores na organização do ensino (LAJOLO, 1996; LUCA. 1996; LIMA, 2012). Segundo Luca (2012), a partir da segunda metade do século XX, com o acesso das camadas populares à educação básica, cresceu o número de matrículas, o número de escolas e de professores, e, em consequência disso, as condições de trabalho docente se modificaram – as longas jornadas, o desprestígio da profissão, o despreparo profissional. Neste contexto, também a função do livro didático se altera, pois passa a ocupar um lugar central na prática pedagógica.

O senso comum, conforme essa autora, classifica uma obra didática como sendo aquela que simplifica conteúdos, e os torna compreensíveis para crianças e jovens, valendo-se de linguagem e estratégias narrativas apropriadas ao grau de compreensão de seus leitores. Essa concepção provoca, inclusive, uma representação depreciativa, no sentido de que se trata de algo que não diz respeito aos especialistas das áreas de conhecimento, portanto superficial e até pouco científico.

Um grupo de trabalho constituído pelo MEC, em 1999, para avaliar o PNLD e sugerir alterações, publicou, em 2001, o documento *Recomendações para uma política pública de livros didáticos*, no qual reconhecem que há uma "cristalização de uma concepção de livro didático", segundo a qual:

> [...] os livros didáticos tendem a apresentar não uma síntese dos conteúdos curriculares, mas um desenvolvimento desses conteúdos; a se caracterizar não como um material de referência, mas como um caderno de atividades para expor, desenvolver, fixar e, em alguns casos, avaliar o aprendizado; desse modo, tendem a ser não um apoio ao ensino e ao aprendizado, mas um material que condiciona, orienta e organiza a ação docente, determinando uma seleção de conteúdos, um modo de abordagem desses conteúdos, uma forma de progressão, em suma, uma metodologia de ensino, no sentido amplo da palavra. (BATISTA, 2001, p. 29).

Nessa perspectiva, o livro didático, utilizado como fonte, assume um lugar de ordenador e controlador do trabalho docente, pois define conteúdos, abordagens e metodologias, que são pouco questionados pelos professores, dadas as condições em que o trabalho docente é exercido na educação básica.

Os vários olhares sobre o livro didático, contraditórios e não consensuais, nos permitem refletir, ainda, sobre um possível discurso de verdades prontas e acabadas. Para Câmara (2012), o livro didático, assim como as apostilas, pertence ao gênero didático pedagógico[3] - GDP, ainda que outros os considere suporte[4], e acrescenta:

---

[3]O GDP (gênero didático-pedagógico) pode então ser definido como um conjunto de textos cujo objetivo é instruir, divulgar, determinar as doutrinas e métodos que devem ser seguidos no processo de ensino e aprendizagem, no domínio discursivo educacional.

[4]Marcuschi (2008), por exemplo, afirma que a diferença entre suporte e gênero é uma discussão polêmica e em andamento. Para ele, o livro deve ser considerado como um suporte e consequentemente o livro didático também. O autor classifica o livro didático como um suporte que possui vários gêneros e que pode "ser tratado como um suporte com características muito especiais" (Marcuschi, 2008, *apud* Câmara, 2012, p.3)

> O fato de o GDP ter como fonte o gênero científico, cria um efeito de sentido de verdade inquestionável, já que validado pela ciência, além de constituir um gênero no qual a polifonia é apagada ou seja, seleciona-se apenas um ponto de vista, uma voz sobre o conteúdo temático abordado. Dessa forma, o GDP assume um caráter homogeneizante dos sujeitos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem (CÂMARA, 2012, p. 3)

Dentre as várias formas de buscar caracterizar o livro didático, Lima (2012), citando Batista[5] (1999), nos indica que o termo “livro didático” é usado – de modo amplo e inadequado, pois abarca uma variedade de objetos portadores dos impressos que são veiculados nas escolas, em que o livro didático é uma delas. Assim, podemos dizer que a denominação inclui vários suportes documentais tais como as apostilas, os livros paradidáticos, os manuscritos.

Para Lajolo (1996, p. 4),

> Didático, então, é o livro que vai ser utilizado em aulas e cursos, que provavelmente foi escrito, editado, vendido e comprado, tendo em vista essa utilização escolar e sistemática. Sua importância aumenta ainda mais em países como o Brasil, onde uma precaríssima situação educacional faz com que ele acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o *que* se ensina e *como* se ensina o que se ensina.

Câmara (2012) buscou estabelecer semelhanças e diferenças entre o livro didático e as apostilas. Dentre as semelhanças, indica a estrutura discursivo-textual (sumário, um texto de apresentação, unidades apresentadas por um texto de abertura, exercícios de interpretação); o caráter homogeneizante do ensino e da aprendizagem; a apresentação dos conteúdos como verdades absolutas. Com relação às diferenças, identificou: maior superficialidade dos conteúdos na apostila do que no livro didático; maior flexibilidade para mudanças nas apostilas do que nos livros; linguagem mais formal e distanciada do aluno nos livros do que nas apostilas.

Mesmo sabendo dessas diferenças, neste trabalho, considerando os objetivos propostos e por facilitar a comunicação, usaremos a denominação *livro didático* no sentido amplo. O que, para nós parece ser inegável é que o livro didático, mesmo na sua acepção mais ampla, não é um elemento neutro. Ele tem subjacente uma visão de mundo, de homem, de educação, de ensino-aprendizagem. “Portanto, ao tomar o livro didático como instrumento da mediação pedagógica, entre a produção de conhecimentos escolares, a atuação dos professores, e as vivências dos educandos enquanto sujeitos sociais, é imprescindível que se busque compreendê-lo mais amplamente, como objeto historicamente situado” (LIMA, 2012).

---

[5] BATISTA, A. A. G. Um objeto variável e instável: Textos, impressos e livros didáticos**.** In ABREU, M. (org.). *Leitura, História e História da Leitura***.** Campinas, São Paulo: Mercado das Letras, 1999.

Nos diversos ramos da didática, há autores que defendem que o processo de ensino-aprendizagem deve partir dos interesses dos estudantes, adequando as necessidades individuais às do meio social. Entretanto, em muitas práticas pedagógicas, o estudante é um ser passivo, a aprendizagem é vista de forma receptiva, automatizada, sem que seja necessário acionar muitas habilidades mentais, limitando-se apenas à memorização. Assim, de acordo com a tendência de didática adotada, as propostas valorizam mais o desenvolvimento de competências, ou a relação entre a teoria e a prática, ou ainda a preparação do estudante para atuar no mercado de trabalho, com a transmissão de informações e conteúdos objetivos, de forma rápida e precisa, ou ainda para aprovação em processos seletivos para as universidades.

Para a Teoria Histórico-Cultural, o processo de ensino-aprendizagem envolve o homem por inteiro, mobiliza-o integralmente, nas relações consigo mesmo e com o mundo à sua volta. Dessa maneira, a centralidade da Teoria Histórico-Cultural está em investigar a formação da consciência a partir do mundo concreto, investigar como o homem se constitui sujeito em sua individualidade, a partir das relações com seus semelhantes e com a natureza. O conhecimento não é transmitido ou adquirido, como sendo um objeto ou uma mercadoria, ele não pode ser inculcado no indivíduo, ele é construído, a partir da realidade, do sentido que fazemos do mundo, da interpretação dos fatos que atingem a coletividade. Ele é compartilhado; é resultado de interações e de diálogos. Assim, a aprendizagem é efetivada pelo próprio indivíduo que também é sujeito no processo de ensino-aprendizagem, através de um trabalho externo e interno. Trata-se de um processo ativo de relação do sujeito com o meio.

Neste sentido, compreendemos que o livro didático deva ser um instrumento organizado de tal forma que seja capaz de contemplar peculiaridades que envolvem o ensino e a aprendizagem, que vão muito além de macetes, estratégias e treinamentos para resolução de questões de concursos e vestibulares. Entendemos, ainda, que seja importante tanto para o escritor do livro didático, quanto para o professor em sala de aula, compreender como o estudante aprende, como se dá a apreensão dos conteúdos; e esta compreensão deve ser fator preponderante no momento de organizar o livro didático e a aula, além de conhecer a disciplina em pauta em seus aspectos essenciais, tantos os aspectos substantivos como os sintáticos de sua organização.

No Brasil, o livro com fins didáticos também tem sido alvo de atenção das políticas públicas. Em vista disso, desde o ano de 1929, vêm sendo desenvolvidas no país iniciativas com a finalidade de legalizar e incentivar a produção de livros com caráter pedagógico. O atual programa de governo para este fim, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), assim denominado a partir de 1989, e ao longo dos anos vem passando por reformulações, a fim de melhor atender às demandas de sua clientela; clientela esta que é composta exclusivamente por escolas da rede pública de ensino, que atuam nos níveis de ensino fundamental e médio.

> Embora a natureza da política do MEC para o livro didático tenha se modificado ao longo de sua história, a criação do PNLD, em 1985, definiu, como já se indicou, as principais diretrizes que vêm orientando as relações do Estado com o livro escolar. Essas diretrizes estão baseadas em cinco pontos centrais: (i) centralização das ações de planejamento, compra e distribuição; (ii) utilização exclusiva de recursos federais; (iii) atuação restrita à compra de livros, sem participação no campo da produção editorial, deixada a cargo da iniciativa privada; (iv) escolha do livro pela comunidade escolar; (v) distribuição gratuita do livro a alunos e docentes (BATISTA, 2001, p.16).

O PNLD possui outros desdobramentos que são o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) e o Programa Nacional do Livro Didático para a Alfabetização de Jovens e Adultos (PNLA);todos vinculados ao Ministério da Educação (MEC).

Por meio do PNLD é possível avaliar, indicar, comprar e distribuir materiais didáticos (livros e dicionários) que são fornecidos gratuitamente aos estudantes das escolas públicas em todo o país, nas redes municipais e estaduais. Por meio dele também é possível identificar o perfil de ensino de Matemática a que se propõe o Programa, a partir dos editais que orientam a participação das editoras interessadas. E porque não dizer que é possível identificar o perfil de ensino de Matemática que o Ministério da Educação propõe, já que se trata de um programa governamental.

A partir do ano de 2001, o processo de avaliação e seleção passou a ser regido por um edital publicado pelo Ministério da Educação, que especifica o conjunto de princípios e critérios que devem ser observados nos livros submetidos à apreciação. A avaliação é realizada por uma equipe de especialistas de cada área do conhecimento. Após essa etapa de avaliação, as obras aprovadas passam a compor um guia, onde, entre outras informações, consta uma resenha que visa orientar os professores, nas escolas, sobre o conteúdo do livro, e a classificação de qualidade da obra por meio da indicação de até 5 estrelas. O guia é disponibilizado um ano antes da chegada dos livros à escola.

É importante ressaltar que existe um edital específico para seleção de coleções didáticas destinadas aos alunos e professores dos anos finais do ensino fundamental da rede pública. A proposta é que os professores, nas instituições de ensino, selecionem e indiquem até duas obras (1ª e 2ª opção) que melhor se encaixem com o Projeto Político Pedagógico da escola, e que poderão ser utilizadas ao longo dos próximos três anos subsequentes (livros reutilizáveis). Encerrado o prazo para a escolha dos livros, eles são encomendados pelo MEC, que informa às editoras as quantidades e local de entrega dos exemplares.

A seleção dos livros, por parte dos professores, nas escolas, merece uma atenção especial, haja vista a importância que este instrumento (o livro) passou a ter ao longo da história para todos os atores envolvidos no processo de ensino-aprendizagem, sobretudo professores, alunos e seus familiares.

Considerando que, para o professor, o livro didático, na qualidade de recurso pedagógico, auxilia na construção e execução do plano de aula. Neste sentido, um livro cuja proposta se coaduna com a perspectiva de trabalho a ser desenvolvida pelo professor representa ganho de tempo e consequentemente facilita o alcance de resultados junto aos alunos, e também amplia as possibilidades de exploração dos conteúdos. Da mesma forma que o contrário pode resultar em perda de tempo para o professor que prepara a aula; para o aluno que deixa de encontrar no livro o suporte necessário para melhorar sua aprendizagem, tendo em vista a carência de acesso a outras fontes de estudo; e para os familiares que ficam sem parâmetro para prestar um possível auxílio ao estudante fora da sala de aula.

No próprio texto do Guia PNLD 2007, consta a advertência:

> É preciso observar, no entanto, que as possíveis funções que um livro didático pode exercer não se tornam realidade, caso não se leve em conta o **contexto** em que ele é utilizado. Noutras palavras, as funções acima referidas são histórica e socialmente situadas e, assim, sujeitas a limitações e contradições. Por isso, tanto na escolha quanto no uso do livro, o professor tem o papel indispensável de observar a adequação desse instrumento didático à sua prática pedagógica e ao seu aluno. (BRASIL, 2007, p.12, *grifo nosso)*

Cabe-nos comentar que, enquanto o PNLD se restringe à avaliação de livros didáticos para as escolas públicas, os Sistemas Estruturados de Ensino, ou ainda Sistemas Apostilados de Ensino, que são materiais didáticos não avaliados pelo PNLD, avançam atingindo escolas privadas e também da rede pública. Segundo Adrião *et al*. (2009), é possível observar que especialmente em regiões consideradas mais ricas (notadamente sul e sudeste), eles estão sendo adotados pelas redes municipais.

Uberaba é um exemplo de município que adotou os Sistemas Estruturados de Ensino no período de 2011 a 2013. Neste caso, o Município deixou de receber o livro didático gratuitamente e investiu seus próprios recursos, na ordem de 20 milhões de reais durante o referido período, para a aquisição do material apostilado (UBERABA, 2014). Segundo a mesma fonte, esse montante equivaleria, por exemplo, à construção de seis escolas de ensino fundamental.

Na maioria dos casos de adoção do material apostilado, muitas são as alegações para justificar a ocorrência, tais como maior apoio aos professores e gestores, suporte pedagógico e treinamento, acesso a portais com conteúdo exclusivo, avaliações pré-formatadas e que podem ser corrigidas por meio de leitores óticos, além da promessa de bons resultados de aprendizagem para os estudantes.

Em Uberaba, além desses fatores, a administração municipal justificou que desta forma estaria preparando os alunos da Rede Municipal para competir a uma vaga nas universidades federais em "pé de igualdade" com os alunos das demais redes de ensino. Outra postura assumida pelo governo à época é que estaria oferecendo os conteúdos conforme os Parâmetros Nacionais, porém ligados à realidade local, já que o material era preparado por uma empresa do ramo de educação da própria cidade (JORNAL DA MANHÃ, 2011).

Dentre os vários motivos que levam os governos municipais à procura pelos Sistemas de Ensino Apostilados, especialmente após o processo de municipalização, Adrião *et al*. (2009) aponta a busca por uniformidade nos processos pedagógicos, sob a alegação de evitar "desigualdades" entre as escolas, visto que a possibilidade de ações diferenciadas gere também qualidade de ensino diferenciada. A autora, porém, alerta que este "cuidado" incide sobre a autonomia das escolas e dos docentes frente à organização do trabalho pedagógico, retirando-lhes, como assegura a LDB, a possibilidade de organizarem suas práticas a partir de necessidades locais ou iniciativas próprias.

A padronização, neste caso, é assumida como o motivo do sucesso das escolas privadas. Em nossa reflexão, porém, a ideia subjacente é a de não encarar a necessidade permanente de formação continuada dos docentes do setor público, ou mesmo repensar a formação inicial, as suas condições de trabalho, de remuneração, a necessidade de reestruturação do currículo e sobre a gestão de nossas escolas; fatores estes que impactam os resultados finais da aprendizagem e desenvolvimento dos estudantes. "Não há menções às desigualdades sociais, culturais e econômicas existentes e às diferenças inevitáveis entre as escolas e seus atores: é a supervalorização dos meios, alienados de fins desejados" (ADRIÃO *et al*., 2009, p. 812).

Também não podemos ser ingênuos de achar que os sistemas oferecerão o mesmo material e o mesmo treinamento para os professores das escolas privadas às públicas. Se dessa forma fosse, a iniciativa privada estaria pondo em risco a migração de sua clientela para o ensino público. Por outro lado, também não estamos, nem podemos desmerecer a qualidade do material oferecido, sem uma avaliação científica.

Além dos aspectos pedagógicos, existem implicações políticas, que, embora não sejam o foco de nossa pesquisa, é alertado por Adrião *et al*. (2009), por ser um fenômeno preocupante, já que se trata da "expansão do privado para dentro do público".

> [...] A expressão parceria púbico-privada [...] implica também na capacidade de intervenção que o setor privado passa a dispor junto à administração pública, por meio da assunção total ou parcial de responsabilidades até então atribuídas ao poder público em sua totalidade. (BEZERRA *apud* ADRIÃO *et al*., 2012, p. 536)

Outro perigo dos Sistemas Apostilados é que eles restringem a atuação do professor ao que está proposto na apostila. Ao contrário do livro didático, uma apostila, que é consumível, do ponto de vista de sua forma de utilização, é inaceitável que seja descartada sem que as atividades ali propostas sejam resolvidas. Assim, para avançar para um novo módulo do material é preciso, necessariamente "estudar" tudo que está proposto naquela apostila.

Do ponto de vista da família do estudante isso pode soar como uma possibilidade de verificar o desempenho do professor em sala de aula, o que se apresenta como total inversão de valores, uma vez que a família deveria estar atenta, sobretudo, ao aumento da aprendizagem e ao desenvolvimento dos filhos/estudantes.

Diante dessa escolha, podemos nos questionar: e onde fica a autonomia do professor e da escola? Onde entra o projeto político pedagógico da escola, já que se adquiriu um livro padronizado?

Já na escolha do livro didático, conforme reportagem de Marta Avancini (2011), a alegação apresentada é que mesmo após a pré-seleção oferecida pelo Guia do PNLD, muitas vezes os professores preferem adotar livros de menor qualidade (o Guia PNLD classifica os livros com até cinco estrelas com a finalidade de indicar a qualidade) por acreditar que terão maior facilidade em utilizá-los.

Tudo isso está relacionado à concepção de educação e ao tipo de formação que é oferecida aos estudantes, as quais têm se mostrado insuficientes: a transmissão de conteúdo. Esse modelo está a serviço da permanência das desigualdades sociais, da formação do cidadão que não reflete o que acontece em seu entorno e que, por isso, também é incapaz de agir em favor de sua transformação.

Como interpreta Libâneo (2014), a função social prioritária da escola é de proporcionar formação cultural e científica, tendo em vista o desenvolvimento humano, integrando no currículo as práticas socioculturais que caracterizam suas vivências. E o livro didático deve refletir esse papel da escola.

Passamos a seguir à contextualização do estudo na rede municipal de ensino de Uberaba-MG.

2.3 A rede municipal de educação de Uberaba: alguns aspectos históricos

Uberaba é um município de Minas Gerais, situado na porção oeste do estado, e composto pela sede e mais 11 bairros rurais. Ocupa uma área física total de 4.540,51 km^2, sendo 256 km^2 de área urbana e 4.284,51 km^2 de área rural. Seu processo de industrialização teve início após a guerra do Paraguai, porém até década de 50, sua principal atividade econômica foi a agropecuária.

De acordo com dados do IBGE (2014), atualmente sua população está próxima dos 320 mil habitantes. Em 2012, o ensino fundamental estava sob a responsabilidade de 35 escolas estaduais, 29 escolas municipais e 30 escolas privadas. A cidade é considerada como cidade-polo educacional e de tratamento de saúde, por possuir, desde o século XIX, colégios e hospitais de referência para a região.

A amplitude educacional do Município de Uberaba é demonstrada pela expressiva quantidade de instituições de ensino, com escolas municipais, estaduais, federais e particulares, que visam atender à demanda estudantil em todas as etapas de educação básica (cerca de 200 escolas) e ensino superior (10 instituições), nas mais diversas modalidades de ensino.

Registra-se que as primeiras escolas do município foram instaladas na zona rural, e no ano de 1976 surgiram as primeiras escolas municipais na zona urbana; ampliadas na década de 80 quando foram instaladas cerca de 11 novas unidades. Nesta mesma época, foi criado o Estatuto do Magistério, houve a abertura de concursos públicos e de investimentos na formação continuada dos professores, com o objetivo de propiciar-lhes melhores condições de trabalho. Ainda neste período, a Secretaria de Educação Municipal adotou a Psicologia do Desenvolvimento como proposta pedagógica do Município. É importante ressaltar que se registra a existência de escolas estaduais na região desde 1909 (UBERABA, 2007, p. 42).

Com vistas à melhoria da qualidade de ensino e sua universalização, no período compreendido entre os anos de 1993 a 2000, o Município implantou o Projeto “Escola Cidadã: construção amorosa da cidadania”, mesma época em que três escolas estaduais passaram pelo processo de “municipalização”, conforme a Constituição Federal de 1988, art.

30, § 4º, que prevê que Estados e os Municípios definirão formas de colaboração, de modo a assegurar a universalidade do ensino obrigatório, na organização de seus sistemas de ensino.

No ano de 1998, foi criado o plano de carreira para os professores da Rede Municipal de Ensino. Em 2000, por meio da Lei nº 7636, de 11 de agosto do mesmo ano, foi criado o Sistema Municipal de Educação, que consolidou a autonomia da Educação local. Vários projetos foram desenvolvidos concomitantemente, tais como publicações pedagógicas periódicas, ampliação de bibliotecas, criação do Conselho Municipal de Educação, de Merenda Escolar, além de outras medidas tomadas para viabilizar o sucesso do sistema, conforme segue:

• Elaboração do primeiro Plano Municipal de Educação;

• Explicitação de uma Filosofia de Educação para a Rede Municipal;

• Elaboração coletiva de Propostas Curriculares;

• Elaboração dos Projetos Pedagógicos das escolas;

• Implementação do Regime de Ciclos;

• Investimento na Formação Continuada dos Profissionais com a criação do Centro de Formação Permanente – CEFOR e a oferta de 11 (onze) cursos de especialização nas diferentes áreas do conhecimento;

• Criação da Faculdade de Educação de Uberaba – FEU – visando à formação de profissionais;

• Atualização dos profissionais através de encontros anuais de educadores.

Esse conjunto de ações rendeu ao Município 03 (três) prêmios de gestão.

Em 2005, a Rede Municipal de Ensino de Uberaba assume a proposta de construção de uma “Cidade Educadora”, sob o compromisso de entender “a cidade como espaço de cultura e a escola como espaço educativo da cidade”. Outro marco para a educação do Município, no mesmo ano, foi a transformação da Faculdade Federal de Medicina em Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM.

Em 2006, foi aprovado o 1º Plano Decenal Municipal de Educação de Uberaba, através da Lei n° 9895, em 07/01/2006. Conforme consta no próprio documento, ele foi sendo construído coletivamente desde 2003, e as propostas nele contidas delineiam a atuação da Rede Municipal para os anos de 2006 a 2015. De acordo com o referido Plano, o ensino fundamental contava na época com cerca de 18 mil estudantes matriculados e 1.158 professores atuando nesse nível de ensino. Em seu texto, encontramos o diagnóstico sobre a qualidade do Ensino Fundamental, o qual revela que apenas 16,20% dos estudantes que finalizam o 4º ciclo possuem domínio de habilidades matemáticas. “Os indicadores das tabelas evidenciam a urgência de se investir numa gestão de escola entendida como “ambiente de aprendizagem”, o que, consequentemente, trará impacto na sala de aula e no desempenho dos alunos” (UBERABA, 2007, p. 60).

2.4 Os PCN e a matriz curricular de matemática em Uberaba/MG para o 8º ano do Ensino Fundamental

A análise de livros didáticos não pode prescindir dos documentos que constituem referência para o ensino em âmbito nacional e, no caso deste estudo, na esfera municipal. Assim, neste tópico apresentamos o que está previsto para o ensino de matemática no quarto ciclo do Ensino Fundamental, focando particularmente o ensino de álgebra. Salientamos, no entanto, que o quarto ciclo é composto pelo 8º e 9º ano, e neste trabalho nosso olhar está voltado apenas para os conteúdos do 8º ano.

A Constituição Federal estabelece em seu Art. 210 que devem ser fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais. Da mesma forma, a LDB/1996, em seu artigo 9º, inciso IV, incumbe a União de estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, com o mesmo objetivo de assegurar uma formação básica comum.

Assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) se apresentam como referenciais para a renovação e reelaboração da proposta curricular do ensino, em nível nacional, e ainda como reforço da importância de construção de um projeto educacional local. O próprio documento informa que sua função é orientar e garantir a coerência dos investimentos no sistema educacional, socializando discussões, pesquisas e recomendações; e aponta para a necessidade e essencialidade de se elaborar parâmetros claros no campo curricular, capazes de orientar as ações educativas nas escolas, na busca da melhoria da qualidade do ensino (BRASIL, 1997).

Nesse sentido os PCN de matemática (BRASIL, 1998) trazem uma breve análise da trajetória das reformas curriculares e seus reflexos no ensino, como é o caso do movimento denominado Matemática Moderna que marcou o ensino de matemática pela preocupação excessiva com formalizações e o distanciamento das questões práticas. Colocava ênfase na teoria dos conjuntos, que privilegiava o ensino de símbolos numa linguagem complexa, deixando de lado o aprendizado da aritmética e da geometria. Posteriormente, numa tentativa de superar essa orientação, o ensino passou a ser norteado com ênfase na resolução de problemas.

Até hoje essas ideias vêm sendo discutidas e avaliadas em seus pontos positivos e negativos, mas é inegável que elas também não foram totalmente superadas. O texto dos Parâmetros Curriculares Nacionais conclui que se nota ainda, por exemplo, “a insistência no trabalho com a linguagem da teoria dos conjuntos nos anos iniciais, a formalização precoce de conceitos, o predomínio absoluto da álgebra nos anos finais e as poucas aplicações práticas da Matemática no ensino fundamental” (BRASIL, 1998, p. 21).

Como documento norteador e dada a abrangência dos assuntos abordados e a forma como estão organizados, os PCN apresentam uma lista de conteúdos cuja finalidade é de apontar caminhos:

1) Para o <u>professor</u>, ao mostrar aspectos fundamentais, para o exercício da docência como professor de matemática nesse nível de ensino:

> identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações; conhecer a história de vida dos alunos, seus conhecimentos informais sobre um dado assunto, suas condições sociológicas, psicológicas e culturais; ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdos de ensino e as formas de avaliação estão intimamente ligadas a essas concepções (BRASIL, 1998, p. 36).

2) Para o <u>aluno</u>, ao assinalar como deve se comportar diante do processo de aprendizagem:

> perceber que, além de buscar a solução para uma situação proposta, devem cooperar para resolvê-la e chegar a um consenso; saber explicitar o próprio pensamento e procurar compreender o pensamento do outro; discutir as dúvidas, supor que as soluções dos outros podem fazer sentido e persistir na tentativa de construir suas próprias ideias; incorporar soluções alternativas, reestruturar e ampliar a compreensão acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, desse modo, aprender (BRASIL, 1998, p. 39)

3) Sobre os conteúdos, ao apresentá-los a partir de blocos de conteúdos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação.

O 4º ciclo Neste trabalho, buscamos manter o foco apenas os conteúdos do 8º ano, por serem os que estão relacionados ao objeto desse estudo. Fizemos, inicialmente, um confronto entre os conteúdos propostos pelos PCN e sua identificação na Matriz Curricular do Município de Uberaba – MG (Anexos A e B).Em seguida, elaboramos o Quadro 5, com foco apenas nos assuntos específicos de álgebra, embora tenhamos a compreensão de que o pensamento e a linguagem algébricos perpassam os vários blocos de conteúdos previstos para o Ensino Fundamental.

Quadro 5– Paralelo entre os conteúdos de álgebra propostos pelos PCN - 4º ciclo e a Matriz Curricular de Matemática para o Município de Uberaba – MG, 8º ano do Ensino Fundamental.

PCN – Matemática – 4º ciclo	**Referência na Matriz Curricular – Uberaba/MG – 8º ano**
Construção de procedimentos para calcular o número de diagonais de um polígono pela observação de regularidades existentes entre o número de lados e o de diagonais.	EE2OC4DA33[6]Compreender e resolver situações-problema que abranjam as propriedades dos quadriláteros[7].
Identificação da natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (afim ou quadrática), expressando a relação existente por meio de uma sentença algébrica e representando-a no plano cartesiano.	EE1OC2DA11 Identificar, em situações-problema, grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais, ou nem diretamente nem inversamente proporcionais.
Resolução de problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três.	EE1OC2DA12 Compreender e resolver situações-problema que incluam grandezas diretamente proporcionais, por meio de estratégias variadas, inclusive, por meio da regra de três.
Tradução de situações-problema por equações ou inequações do primeiro grau, utilizando as propriedades da igualdade ou desigualdade, na construção de procedimentos para resolvê-las, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.	EE1OC3DA25 Identificar a raiz de uma equação do 1º grau. EE1OC3DA26 Utilizar uma equação ou uma inequação do 1º grau, para expressar uma situação-problema. (D33).

[6]Esses códigos aparecem na Matriz Curricular do Município de Uberaba /MG com a seguinte identificação: EE – Eixo Estruturante, OC – Objeto de Conhecimento, DA – Direito de Aprendizagem. Os números referem-se aos conteúdos a serem estudados.
[7]No 8º ano são estudados os quadriláteros. Outros polígonos são indicados no ano seguinte.

Obtenção de expressões equivalentes a uma expressão algébrica por meio de fatorações e simplificações.	.EE1OC3DA14 Utilizar a linguagem algébrica para resolução de problemas. EE1OC3DA23 Obter expressões equivalentes a uma expressão algébrica, por meio de fatoração e de simplificação.
Resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações do primeiro grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-lo, inclusive o da representação das equações no plano cartesiano, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.	EE1OC3DA27 Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do 1º grau. (D35). EE1OC3DA28 Compreender e resolver problemas, por meio de um sistema de equações do 1º grau, construindo diferentes procedimentos e discutindo o significado das raízes encontradas, em confronto com a situação proposta.
Construção de procedimentos para calcular o valor numérico e efetuar operações com expressões algébricas, utilizando as propriedades conhecidas.	EE1OC3DA18 Efetuar operações com monômios e polinômios EE1OC3DA15 Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica. EE1OC3DA16 Construir procedimentos, para efetuar operações com expressões algébricas, utilizando propriedades conhecidas. EE1OC3DA29 Utilizar valores numéricos de expressões algébricas, para constatar a falsidade de igualdades ou de desigualdades.

Fonte: Elaboração da autora com base nos PCN (BRASIL, 1998, p. 87) e as Matrizes Curriculares do Município de Uberaba – MG (Anexo A)

Após esse confronto de informações, identificamos que a proposta curricular do Município de Uberaba, no geral, não negligenciou os conteúdos sinalizados pelos PCN. Com relação ao desenvolvimento de "Atitudes", não foi possível observar na Matriz Curricular do Município de Uberaba – MG como ele é concebido. Nos PCN, está explícito um rol de atitudes a serem desenvolvidas, como a capacidade de perseverança, na busca de resultados; interesse por utilizar as diferentes representações matemáticas; valorização do trabalho coletivo; valorização do uso dos recursos tecnológicos, como instrumentos (BRASIL, 1998). Esse item pareceu-nos de responsabilidade quase que exclusiva do professor.

Com relação aos conteúdos algébricos específicos, os PCN indicam que, já no terceiro ciclo, seja iniciado o trabalho com o conceito de variável e com as expressões algébricas “como forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas” (BRASIL, 1998, p. 68). O conceito de incógnita também poderá ser explorado nas situações-problema envolvendo variações de grandezas, quando se resolvem equações. Os PCN sugerem que a ênfase seja colocada na construção de estratégias e não nas técnicas convencionais.

Para o quarto ciclo, os PCN propõem que os alunos trabalhem com problemas que envolvam estabelecer relações entre grandezas, elaborar modelos, generalizar. Enfatizam a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a identificação e o trabalho com incógnitas, parâmetros e variáveis, dentro das diferentes concepções de álgebra. Para o desenvolvimento do pensamento algébrico, o aluno deve ser conduzido a produzir e interpretar diferentes escritas de expressões algébricas; resolver problemas por meio de equações e inequações de primeiro grau; estabelecer leis matemáticas que expressem a relação entre grandezas.

Ainda que a álgebra não seja um bloco de conteúdos nos PCN, estando incluída no bloco “Números e Operações”, a visão que se tem de álgebra não é restrita – “um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas” (BRASIL, 1998, p. 115)

Os conteúdos propostos, os objetivos e as orientações didáticas têm subjacentes as diversas concepções de álgebra, que foram sintetizadas nos quadros do tópico 1.7 deste trabalho (Quadros 1, 2, 3, 4). Os PCN ressaltam o conceito de variável e as funções que as letras têm, porém não há ênfase em outros conceitos básicos, como o de função e o de polinômio, que são trabalhados neste nível de ensino. Pouco abordada e discutida é a relação entre pensamento e linguagem algébrica, causa, inclusive dos muitos problemas relacionados ao seu ensino, particularmente a falta de significados atribuídos a uma linguagem que é imposta, como apontado por educadores matemáticos que pesquisam e discutem essa questão.

No próximo capítulo, apresentamos os dados coletados e a análise com base nos conceitos da Teoria Histórico-Cultural, a partir das unidades de análise definidas. Mostramos, inicialmente, a identificação das unidades de análise nos textos referentes aos conteúdos algébricos de modo específico.

3 - ANÁLISE DOS "LIVROS DIDÁTICOS" DE MATEMÁTICA DO 8º ANO

Não restam dúvidas de que a escola é um lugar privilegiado de formação, embora existam tantos outros ambientes potencializadores da educação integral do indivíduo, como assevera Núñez (2009, p.17): "a educação é o processo que mobiliza a personalidade integral do aluno na sua formação, como sujeito social e histórico." Não obstante as contradições que esta tarefa supõe, é imprescindível melhorar as condições de ensino-aprendizagem, para que os estudantes tenham acesso aos conhecimentos socialmente construídos pela humanidade, e para que efetivamente apliquem este conhecimento para o melhor desenvolvimento da sociedade.

Especialmente, diante dos avanços da sociedade moderna, constata-se a necessidade eminente do saber matemático, pois a cada dia situações complexas surgem para a solução de problemas científicos e tecnológicos, além, é claro das rotinas do mundo do trabalho e das relações sociais. Desta forma, o conhecimento matemático deve deixar de funcionar como parâmetro excludente entre os que obtêm sucesso e os que não o obtêm, e passar a instrumentalizar o estudante para compreender o mundo à sua volta e contribuir para o desenvolvimento das funções mentais superiores dos alunos: atenção, memória, observação, análise, criatividade, abstração e generalização. Na perspectiva da abordagem histórico-cultural aprendizagem gera desenvolvimento e desenvolvimento possibilita novas aprendizagens.

Existem muitas iniciativas e estudos com foco no livro didático. Aqui se deseja apresentar especificamente um estudo sobre o livro didático de matemática com base na concepção de educação, de ensino, de desenvolvimento, de pensamento teórico e de formação de conceitos apresentadas pela Teoria Histórico-Cultural; e ancorado nas diversas concepções de álgebra e de educação algébrica que foram pontuadas ao longo desse trabalho.

Conforme já anunciamos anteriormente, analisamos os volumes de duas coleções, que foram adotadas na rede municipal de ensino de Uberaba, no período de 2011 a 2014.

O material didático do Sistema de Ensino CNEC está identificado por cadernos, o que corresponderia às apostilas de Sistemas Estruturados de Ensino, conforme foi tratado no capítulo anterior. No 8º ano, o conteúdo foi organizado em três volumes. Cada volume traz conteúdos e atividades de matemática, apresenta nas páginas iniciais o sumário do volume e o sumário completo. O volume 1 contém as seguintes unidades: Introdução à Matemática Financeira, Números Reais, Gráfico de Setores e Ângulos, Paralelismo, Cálculo Algébrico e Produtos Notáveis. No volume 2, encontram-se as unidades: Fatoração de Expressões

Notáveis, Os triângulos e seus Pontos Notáveis, O Estudo dos Quadriláteros. E, no volume 3: Polígonos, Mosaicos e Poliedros, Equações e Sistemas, Uma Ideia Redonda.De modo geral, são apresentados os conteúdos, alguns introduzidos por uma seção denominada *Texto e Contexto*, sempre há a seção *Exercícios de sala*, em alguns tópicos aparecem: *Exercícios Propostos*, *Você se lembra, Ampliando o conhecimento*, *Exercícios de aprofundamentos*, dentre outras. Não há ficha catalográfica, portanto, não é possível identificar os autores.

O livro analisado *Vontade de saber matemática* está organizado em um único volume por ano escolar, e em cada um deles são tratados apenas conteúdos da disciplina matemática. Tem o formato convencional da maioria dos livros didáticos que circulam no país. Foi avaliado e recomendado pelo PNLD.

A seguir, apresentamos a análise de cada um dos livros, após fazer o mapeamento das unidades de análise identificadas, para depois nos determos na análise mais pormenorizada.

3.1 Análise dos cadernos de matemática do SISTEMA DE ENSINO CNEC

A primeira unidade de conteúdos analisados no volume 1 do caderno corresponde ao tópico de número 10 e é denominado “Cálculo Algébrico”. É composto por 5 seções a saber: 10. Introdução ao cálculo algébrico, 10.1 Expressões algébricas, 10.2 Valor numérico de uma expressão algébrica, 10.3 Polinômios, e 10.4 Operações com monômios e polinômios.

Quadro 6 – Análise do tema: Cálculo Algébrico.

Conteúdo	**Observações**	**Unidades de análise**
10. Introdução ao cálculo algébrico	Introdução do que é álgebra: a) realizou uma leitura segundo o objeto de estudo da álgebra (Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993, p. 78) b) identificou a contribuição histórica dos árabes, mas não fez referência a outras culturas. c) classificou duas abordagens históricas da álgebra como Álgebra Clássica (estudo das equações e métodos de resolvê-las) e Álgebra Moderna (estudo das estruturas matemáticas: grupos, anéis, corpos etc) d) enfatizou a álgebra como “ciência das equações”, na tentativa de dar um significado para a palavra álgebra	1 2 3 5.1.2 5.1.3
10.1 Expressões algébricas	a) Introduziu o assunto por meio de uma situação-problema; b) organizou os dados em uma tabela com duas variáveis, mas não mencionou o conceito de função.	1 4 5.1.2 5.1.4 5.3.1
10.2 Valor numérico de uma expressão algébrica	a) Enfatiza a notação da expressão algébrica e procura atribuir-lhe significado em si mesma. Valorização do algoritmo. b) Não utiliza figuras ou ilustrações. c) Permanece na linha de resolução de problemas. d) Não apresenta construção lógico-histórica. e) Não esclarece a interrelação entre os conceitos abordados	4 5.2.3.1 5.3.1
10.3 Polinômios	a) Valoriza os nexos externos dos monômios: parte numérica, parte literal e coeficiente. b) Apresenta uma situação-problema. c) Propõe atividade coletiva: discussão d) Define monômios como produto de letras e números. e) Induz o aluno a concluir que um polinômio é a soma de monômios.	4 5.3.1 5.2.3.2
10.4 Operações com monômios e polinômios	a) Apresenta uma situação-problema. b) Estabelece relação entre as operações com polinômios e a definição de área. c) Privilegia os procedimentos. d) Valoriza os nexos externos.	1 4 5.1.2 5.2.2 5.2.3.2

Fonte: elaborado pela autora

3.1.1 Análise do conteúdo "Introdução ao cálculo algébrico"

Neste primeiro bloco, o autor faz uma introdução do que é a álgebra, apresentando o fragmento de um texto sobre história da matemática.

Figura 4– Introdução ao cálculo algébrico

CÁLCULO ALGÉBRICO

10. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO ALGÉBRICO

Ampliando o conhecimento

A seguir, temos um texto no qual você poderá descobrir um pouquinho da história da Álgebra, essa parte da Matemática muito útil em nossa vida.

Álgebra é uma variante latina da palavra árabe *al-jabr* (às vezes transliterada *al-jebr*), usada no título de um livro, *Hisab al-jabr w'al-muqabalah*, escrito em Bagdá por volta do ano 825, pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al Khowarizmi (Maomé, filho de Moisés, de Khowarizm). Este trabalho de álgebra é com frequência citado, abreviadamente, como *Al-jabr*.
Talvez a melhor tradução fosse simplesmente "a ciência das equações".
Ainda que originalmente "álgebra" refira-se a equações, a palavra hoje tem um significado muito mais amplo, e uma definição satisfatória requer um enfoque em duas fases:
(1) Álgebra antiga (elementar) é o estudo das equações e métodos de resolvê-las.
(2) Álgebra moderna (abstrata) é o estudo das estruturas matemáticas tais como grupos, anéis e corpos .

Tópicos de História da Matemática - John K. Baumgart

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 1, p. 88

Nesse fragmento o autor realiza uma leitura histórica da palavra álgebra, segundo o seu objeto de estudo – Álgebra Clássica (estudo das equações e métodos de resolvê-las) e Álgebra Moderna (estudo das estruturas matemáticas: grupos, anéis, corpos etc), conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993). Na tentativa de dar um significado para a palavra *álgebra*,o texto enfatiza-a como a "ciência das equações". Neste mesmo fragmento é citada a contribuição histórica dos árabes, por meio de um livro escrito em Bagdá, por volta do ano 825, porém não é citado o desenvolvimento da álgebra em outras culturas.

"O aluno contemporâneo pode entender a palavra, o número, o objeto da natureza, a obra de arte, só quando elas são vistas simultaneamente do ponto de vista de diferentes culturas (DAVIDOV, 1995 *apud* FREITAS; LIBÂNEO, 2013, p. 328). Por outro lado, ainda que tenha havido uma preocupação em situar historicamente a álgebra, o fragmento aborda uma possibilidade de leitura da álgebra, citando conceitos tais como os de grupos, anéis e corpos, que só são discutidos em nível de graduação, deixando assim os professores impossibilitados de discuti-los neste nível de ensino. Assim, a função do texto é ilustrativa, não se constituindo em um recurso de aprendizagem para os conceitos que serão tratados.

3.1.2 Análise do conteúdo "Expressões algébricas"

Ao tratar das expressões algébricas, o assunto é introduzido por meio de uma situação-problema, na qual é possível identificar a concepção de álgebra como estudo de relações entre grandezas, que é uma das concepções apresentadas por Usiskin (1995).

Figura 5– Expressões algébricas.

10.1 Expressões algébricas

Observe o exemplo a seguir:

Em um supermercado, o preço unitário de um pacote de bolachas é de R$ 1,50. Portanto, poderíamos construir a seguinte tabela:

Número de pacotes de bolachas	Valor a pagar em reais
1	R$ 1,50
2	R$ 3,00
3	R$ 4,50
4	R$ 6,00
X	????

Qual a expressão que indica, de modo geral, o valor a pagar?________________________________

Essa expressão do preço a pagar (1,50 X) é um exemplo de **expressão algébrica** ou **literal.**

Expressões algébricas podem ser definidas como expressões constituídas por números e letras entre os quais existem sinais de operações. As letras que aparecem numa expressão algébrica são chamadas de **variáveis.**

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 1, p. 88.

Nessa situação-problema os dados foram organizados em uma tabela com duas variáveis interdependentes, mas não se explorou devidamente o conceito de "variável", considerando-as apenas como “as letras que aparecem numa expressão algébrica”. Esse conceito é restrito, porque fica limitado a uma linguagem, o que é questionado por Vigotski, quando afirma que não se pode separar o pensamento (nexo interno dos conceitos) e a linguagem (nexo externos dos conceitos), mas estudá-los em suas relações. Também pelos PCN:

> O ensino passou a ter preocupações excessivas com formalizações, distanciando-se das questões práticas. A linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, enfatizava o ensino de símbolos e de uma terminologia complexa comprometendo o aprendizado do cálculo aritmético, da Geometria e das medidas” (BRASIL, 1998, p. 19-20).

Fica explícita a preocupação em escrever uma expressão sem que ela ganhe um significado atrelado a um conceito científico, embora esteja implícito um desejo de dar esse significado, porém apoiado numa situação que se pretende “contextualizada”, ou seja, apoiado num nexo externo do conceito, conforme nos fala Sousa, Panossian e Cedro (2014).

A situação apresentada envolve duas variáveis, uma independente (o número de pacotes de bolachas) e a outra dependente (valor a pagar em reais), que se relacionam de modo que a cada valor de uma corresponde um único valor da outra, portanto, tem subjacente o conceito de função, que poderia ter sido explorado, uma vez que é um conceito essencial na álgebra e na matemática.

As “expressões algébricas” foram definidas como sendo expressões constituídas por números e letras entre os quais existem sinais de operações, atendendo desse modo à concepção “Letrista” de álgebra, que se detém em apenas oferecer uma descrição do conteúdo, e deixa de fora coisas que poderiam ser caracterizadas como atividade algébrica (LINS; GIMENEZ, 2001).

3.1.3 Análise do conteúdo “Valor numérico de uma expressão algébrica”

Neste tópico, que se refere ao valor numérico de uma expressão algébrica, o raciocínio ainda é desenvolvido com base nos dados da situação-problema inicialmente apresentada, mas a ênfase é dada à notação da expressão algébrica, em linguagem simbólica, e ao algoritmo que resultará no valor numérico da expressão.

Figura 6– Valor numérico

10.2 Valor numérico de uma expressão algébrica

De acordo com a tabela de pacotes de bolacha e após determinarmos sua expressão algébrica, poderíamos calcular o preço a pagar de qualquer quantidade de pacotes de bolachas comprados. Por exemplo, se a expressão é 1,50 X, quando quisermos saber o preço a pagar por 15 pacotes dessa bolacha, basta substituir x por 15, na expressão anterior, encontraremos o valor.

1,50 X $\rightarrow$ expressão algébrica

Se X = 15, temos:

1,50 . 15 = 22,50 é o **valor numérico** dessa expressão para X = 15.

Portanto, pagarei R$ 22,50 pelos 15 pacotes de bolacha.

Valor numérico de uma expressão algébrica é o número que se obtém após substituir as variáveis por números e efetuar as operações indicadas.

O número que vem antes da variável na expressão algébrica é chamado de coeficiente.

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 1, p. 89

Nele não foram apresentadas figuras ou ilustrações, nem apresentada uma construção lógico-histórica dos conhecimentos, recursos que, se devidamente organizados, favoreceriam a aprendizagem.

No tópico seguinte são apresentados os polinômios, iniciando pela discussão coletiva do significado do prefixo “poli”. Na sequência é proposta uma situação-problema sobre cálculo de área, da qual se espera extrair um monômio como resposta ao problema.

3.1.4 Análise do conteúdo “Polinômios”

Figura 7– Polinômios

10.3 Polinômios

Agora vamos estudar os monômios, binômios, trinômios e polinômios.

Ampliando o conhecimento

Em duplas, discuta sobre o significado do prefixo **poli** em poliedro e polígonos.

Leia a seguinte situação-problema:

Wilson está construindo seu consultório. Resolveu ladrilhar o chão de um dos banheiros. Para isso, utilizou 225 peças de ladrilhos quadrados de lado **x**. Qual a expressão algébrica da área total ladrilhada nesse banheiro?

____.

Esta expressão ______________ denominamos de **monômio**. Todo monômio possui uma parte numérica, chamada de coeficiente, e uma parte literal.

Como você percebeu, monômio é uma expressão definida pelo produto de números e letras.

A soma algébrica de monômios é chamada de _________________________. Num polinômio, cada parcela (que é um monômio) é denominada de **termo**.

Exemplos:

a) $4xy^2$ é um monômio cuja parte literal é xy^2, e a parte numérica ou coeficiente é 4.

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 1, p. 91

O autor caracteriza os monômios destacando os nexos externos do conteúdo: parte numérica, parte literal e coeficiente, e define-os como produto de letras e números, reafirmando a concepção "letrista" de álgebra; e por indução, leva o aluno a concluir que um polinômio é a soma de monômios. A essência do conceito de um polinômio está no conceito de função. Se esse conceito não é explorado, o conceito de polinômio fica restrito a uma expressão algébrica. Embora haja, como nos tópicos anteriores, a preocupação com a contextualização, ela não assegura a construção do conceito científico, pois os nexos internos não são explorados. Davidov (1988, p. 128) explica, "[...] Ter um conceito sobre um ou outro objeto significa saber reproduzir mentalmente seu conteúdo, construí-lo. A ação de construção e transformação do objeto mental constitui o ato de sua compreensão e explicação, o descobrimento de sua essência [...]"

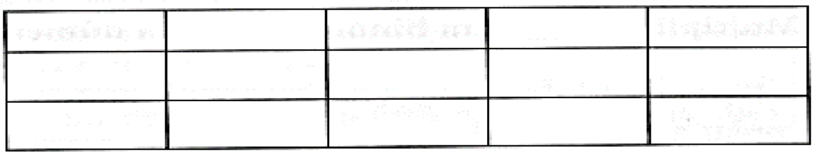
A seguir, o autor define monômios semelhantes e ensina como calcular o grau de um polinômio, exemplificando em ambos os casos. Este bloco é finalizado com as "operações com monômios e polinômios". Novamente é proposta uma situação-problema de cunho geométrico, cujas questões exigem operações com polinômios a partir da definição de área, assim é possível identificar a concepção de Educação Algébrica Fundamentalista-Analógica, que é marcada pela utilização de recursos geométrico-visuais (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

3.1.5 Análise do conteúdo "Operações com monômios e polinômios"

Figura 8– Operações com monômios e polinômios

10.4 Operações com monômios e polinômios

Acompanhe o exemplo: um pedreiro está colocando ladrilhos na sala. A figura a seguir representa o desenho que ficará no piso após a reforma:



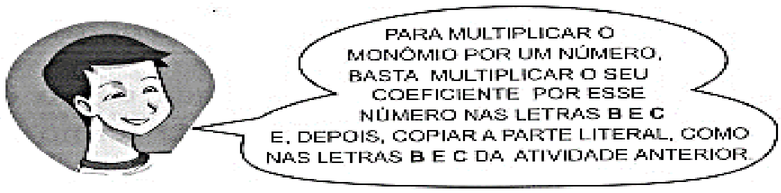
Cada retângulo da figura tem **x** unidades de largura e **2x** unidades de comprimento. Nessas condições, determine:

a) a área de cada retângulo.

b) a área ocupada pelos ladrilhos escuros.

c) a área ocupada pelos ladrilhos brancos.

d) a área total do piso representado pela figura anterior.



Observe que temos, na letra **d** do exemplo anterior, uma soma de dois termos em $\mathbf{x^2}$. Quando isso acontece, somamos os coeficientes dos termos que apresentam a mesma parte literal, esses termos são chamados de termos semelhantes.

Acompanhe: A área total será $30x^2$, que é um monômio de 2º grau.

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 1, p. 93.

Por se tratar de operações, o transformismo algébrico e os procedimentos operacionais também foram privilegiados, o que nos leva a refletir que a Educação Algébrica "precisa passar a considerar também o fato de que qualquer aspecto técnico só pode se desenvolver se, ao modo de produção de significado que o sustenta – portanto, à lógica das operações subjacente – o aluno confere legitimidade" (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 160).

3.1.6 Análise do conteúdo "Produtos Notáveis"

O segundo bloco de conteúdos analisados no volume 1, correspondente ao item 11 do caderno, e é denominado "Produtos Notáveis". É composto por 6 seções a saber: 11. Introdução ao produto notável, 11.1 Quadrado da soma de dois termos, 11.2 Quadrado da diferença de dois termos, 11.3 Produto da soma pela diferença de dois termos, 11.4 Cubo da soma de dois termos, e 11.5 Cubo da diferença de dois termos.

Quadro 7 - Análise do tema: Produtos Notáveis

Conteúdo	**Observações**	**Unidades de análise**
11 Introdução ao Produto Notável	a) Introduz a temática por meio de textos para reflexão b) Pontua a importância do pensamento lógico, da criatividade, da mutabilidade e da utilidade. c) Motiva o aluno a encontrar um significado para o termo "produto notável". d) Estabelece relação entre os polinômios e os produtos notáveis. e) Define produtos notáveis a partir da ideia de regularidade/padrão existente neles.	1 2 5.4.2 5.4.5
11.1 Quadrado da soma de dois termos	a) Recorda a propriedade distributiva b) Utiliza recursos geométricos e valoriza os procedimentos c) Propõe o uso da linguagem retórica.	4 5.2.3.2 5.3.2
11.2 Quadrado da diferença de dois termos	a) Propõe o raciocínio algébrico análogo com o aritmético: aritmética generalizada. b) Utiliza recursos geométricos e valoriza os procedimentos.	4 5.1.1 5.4.5 5.2.3.2 5.3.2

11.3 Quadrado da soma pela diferença de dois termos	a) Utiliza recursos geométricos e valoriza os procedimentos.	4 5.2.3.2 5.3.2
11.4 Cubo da soma de dois termos	a) Valoriza os procedimentos. b) Abordagem lógico-simbólica.	4 5.1.4 5.2.4.1
11.5 Cubo da diferença de dois termos	a) Valoriza os procedimentos. b) Abordagem lógico-simbólica.	4 5.1.4 5.2.4.1

Figura 9– Produtos notáveis

PRODUTOS NOTÁVEIS

11. INTRODUÇÃO AO PRODUTO NOTÁVEL

Texto e contexto

Leia estes textos.

"...Tivemos o século das máquinas e da tecnologia. O primeiro século do milênio atual vai ser o do pensar. Vai vencer aquele que tiver instrumental , pensamento lógico, quem for criativo e inovador."

Jonofon Sérates

"Inovar é desenvolver uma criatividade com uma utilidade, é assim, de maneira simples, podemos definir a inovação. A inovação e a criatividade dominam o mercado mundial, admitindo grande importância, no mundo globalizado.
... "O resplendor da inovação reina naquele capaz de mudar aquilo que as pessoas acham que não pode ser mudado."

Trechos de Walter Nunes.

Reflita: Após essa leitura, você se considera criativo?

De quantas maneiras diferentes você consegue escrever o produto 10.15? Escreva a que você considera mais criativa.

Mostre sua criatividade : sabendo que o trinômio $x^2 + 2x + 1$ é um produto de binômios, quais são estes fatores?

O que significa produtos notáveis?

Alguns produtos de polinômios apresentam uma regularidade (um padrão) nos seus resultados facilitando os cálculos, por isso são chamados de produtos notáveis.

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 1, p. 105

Na introdução da segunda unidade, são apresentados dois fragmentos de texto que tratam da importância da inovação, do pensamento lógico, da criatividade, da mutabilidade e da utilidade. É proposto que o produto de dois números naturais dados seja escrito, de forma criativa; e em seguida, solicita-se que uma expressão algébrica dada seja escrita como produto de binômios, também com criatividade. O estudante é motivado a encontrar um significado para o termo “produto notável” tendo por base o que expressam as palavras “produto” e “notável”. Essa ordem de apresentação considera primeiro a operação e depois o significado. Essa construção opõe-se ao que preconizam Freitas e Libâneo (2013, p. 332-333):

> Ao tomar um determinado objeto de conhecimento como conteúdo do ensino/aprendizagem, o professor deve investigar seu aspecto ou relação nuclear, na qual aprecem as relações fundamentais de sua gênese e transformação histórica, expressando o seu princípio geral. A partir desse princípio geral, o professor estrutura e organiza a atividade de estudo do aluno, de modo que ele realize abstrações e generalizações conceituais,

> sendo capaz de utilizá-las na análise e solução de problemas específicos da realidade envolvendo o objeto.

Esse primeiro momento tem a vantagem de não priorizar tanto a linguagem e o algoritmo, propondo inicialmente a reflexão, embora esteja enfatizando um nexo externo, pois o que está em jogo é a regularidade/padrão de um tipo de operação de expressões algébricas, apontada em seguida. Assim, o conteúdo foi apresentado sem o contexto de seu modo de elaboração ou necessidade. Novamente o texto introdutório tem caráter ilustrativo já que a regularidade existente nos produtos notáveis não deixa espaço para a criatividade e a inovação suscitadas.

Nessa abordagem é possível identificar algumas ideias das concepções de álgebra e de educação algébrica que orientam nossa análise: a álgebra como caminho de pensamento (LEE, 2001) ao propor o raciocínio sobre padrões e controle mental do desconhecido, invertendo e desfazendo novamente operações; b) a Álgebra como aritmética generalizada (LEE, 2001), ao propor primeiramente exemplo numérico para em seguida aplicar o mesmo processo em exemplo algébrico.

3.1.7 Análise do conteúdo "Quadrado da soma de dois termos"

Figura 10– Quadrado da soma de dois termos

Você se lembra...

Identidade = é uma igualdade que permanece verdadeira qualquer que seja a variável que nela aparece.

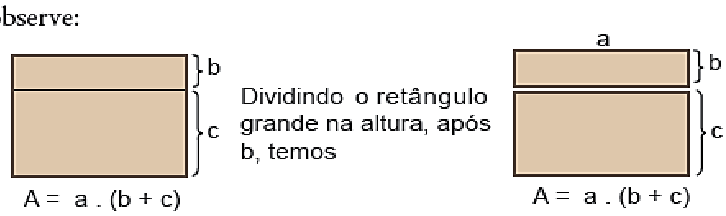
Exemplo: $a + c = c + a$

Distributiva = propriedade da matemática que permite distribuir uma adição ou subtração em relação ao produto, sem alterar o resultado.

Exemplo: $a.\ (b+ c) = a.b + a.c$

$x.(\ y - z) = xy - xz$

Podemos mostrar a propriedade distributiva utilizando medida de área de retângulo (A = base . altura), observe:



Como a figura é a mesma, podemos afirmar que elas possuem a mesma medida de área, ou seja, $a\ .\ (b + c) = a.b + a.c.$

Vamos agora aprender os produtos notáveis utilizando a propriedade distributiva por meio do cálculo de área de regiões retangulares.

11.1 Quadrado da soma de dois termos

Seja o quadrado da soma indicada: $(a + b)^2 = (a + b)\ .\ (\ a + b)$

• Usando a distributiva, temos:

$$(a + b)^2 = (a + b).\ (a + b) = a.a + a.b + b.a + b.b$$

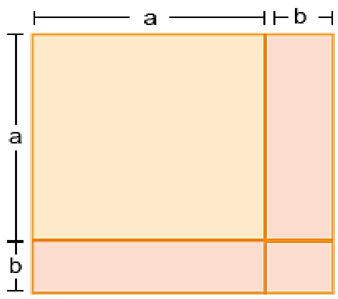
$$= a^2 + a.b + a.b + b^2$$

$$= a^2 + 2\,a.b + b^2$$

Assim, temos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a.b + b^2$$

Geometricamente, é equivalente à medida da área de uma superfície quadrada de lado (a + b):



Com suas palavras, explique o que foi feito para medir a área da superfície quadrangular de lado (a + b) para se chegar ao quadrado da soma de dois termos.

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 8º ano, v. 1, 2013, p. 106

Nessa abordagem, primeiramente recordou-se a propriedade distributiva de modo simbólico e posteriormente de maneira geométrica, o que nos remete à concepção de Educação Algébrica Fundamentalista-analógica, apresentada por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), na qual se utilizam recursos geométrico-visuais para justificar as passagens do transformismo algébrico; e também a concepção Letrista Facilitadora (LINS; GIMENEZ, 2001) que prevê a utilização de áreas para ensinar produtos notáveis.

A ênfase centra-se nos nexos externos do conteúdo: a linguagem e os procedimentos. Prestes, Tunes e Nascimento (2013) ressaltam que a criação, uso e operação com signos e símbolos é muito importante na visão dialética de desenvolvimento e apropriação da cultura humana, pois seus efeitos repercutem na memória como organizadora do pensamento, na atenção, na percepção, no pensamento e na vontade, mas desde que não estejam dissociados de significado.

Por fim, é proposto que o aluno explique "com suas palavras" o procedimento para cálculo da área, o que poderia ser utilizado para acrescentar conhecimento sobre um momento histórico de desenvolvimento da linguagem algébrica que é chamado de linguagem retórica, utilizada antes da formalização da linguagem algébrico-simbólica. Entretanto, ficamos questionando sobre o que se espera do aluno. A generalização?

É preciso destacar aqui alguns aspectos. O primeiro se refere à necessidade de realizar esse cálculo caracterizado como produto notável. Essa necessidade precisa ser suscitada, conforme é discutido por Longarezi e Puentes (2013, p.21):

> [...] ao homem não basta ter necessidades e objetos que as atendam, mas deve haver um motivo que conduza a atividade da necessidade ao objeto. Nossos motivos, aquilo que nos move, são socialmente constituídos, assim como nossas necessidades não são apenas biológicas, mas sócio-históricas, contudo, podemos estar ou não conscientes deles, dependendo da estrutura da atividade, do seu conjunto de determinantes.

O aluno deve ficar se perguntando: por que eu devo fazer isso? Em que condições? Para que? O segundo está relacionado à questão da regularidade que foi anunciada no texto introdutório, mas não foi explorada neste tópico. Esse fato é importante, porque é o que o caracteriza como notável. Terceiro, a associação dos produtos notáveis ao cálculo de áreas ou de volumes é ilustrativo, mas não vai à essência – que é a regularidade e a generalização de um padrão. Outro aspecto fundamental, ao abordar esse assunto, é que estamos lidando com as operações e os seus algoritmos. É preciso que isso fique claro.

3.1.8 Análise do conteúdo "Quadrado da diferença de dois termos" e "Produto da soma pela diferença de dois termos"

Figura 11**– Quadrado da diferença de dois termos**

11.2 Quadrado da diferença de dois termos

Todo número pode ser escrito com a soma de dois números, ou poderá também ser escrito como a diferença de outros dois.

Exemplificando: $12 = (10 + 2)$ ou $12 = (13 - 1)$

Logo, $12^2 = (10 + 2)^2 = 144$ ou

$12^2 = (13 - 1)^2 = (13 - 1) . (13 - 1)$

Aplicando a distributiva, teríamos:

$13^2 - 1 . 13 - 1 . 13 + 1^2 = 13^2 - 2 . 1 . 13 + 1^2$

$12^2 = (13 - 1)^2 = (13)^2 - 2 . 1 . 13 + (1)^2$

$12^2 = 169 - 26 + 1 = 144$

E se não tivermos apenas números?

Para o quadrado da diferença de dois termos, vale o mesmo raciocínio e desenvolvimento da propriedade distributiva.

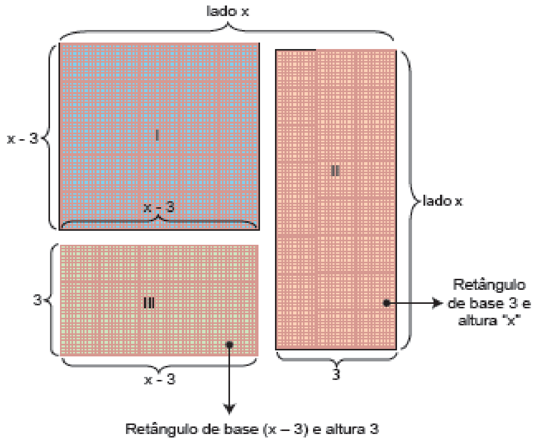
$(x - 3)^2 = (x - 3).(x - 3) = x . x + x . (-3) + (-3) . x + (-3). (-3)$

$= x^2 \quad - 3x \;\; -3x \quad + 9$, reduzindo os termos semelhantes, temos:

$\mathbf{(x - 3)^2 \quad = x^2 \;\; - 6x \; + \; 9}$

Geometricamente, equivale à medida da área da região quadrada de lado $(x - 3)$.

Observe o desenho:



Para obter a medida da área da superfície quadrada (x – 3), tivemos que retirar da superfície quadrada de lado x as áreas de duas superfícies retangulares de dimensões 3 e (x– 3) e a outra de dimensões 3 e x.

Observe:

Portanto, temos $(x-3)^2 = x^2 - [3.(x-3) + 3.x]$

$$= x^2 - [3x - 9 + 3x]$$

$$= x^2 - [6x - 9]$$

$$\mathbf{(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9}$$

Qual é o monômio que deve ser somado ao polinômio $4m^4 + \frac{1}{4}n^2$, para se obter $\left(2m^2 - \frac{1}{2}n\right)^2$?

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 1, p. 111

No tratamento desse tópico, que é de mesma natureza que o anterior, partiu-se de uma situação aritmética, buscando a generalização de um modelo aritmético para um algébrico, de acordo com a Concepção de Álgebra como Aritmética Generalizada apresentada por LEE (2001) e Usiskin (1995). São utilizados, também, recursos geométricos para justificar as passagens do transformismo algébrico, o que identifica a presença das concepções Letrista Facilitadora e Fundamentalista-analógica. A associação ao cálculo de áreas, que, nesse caso, já não é tão evidente como na anterior, pode mais dificultar do que auxiliar na criação de uma significação para o procedimento. Do mesmo modo que no tópico anterior, não se cria uma necessidade e não se explora a essência do procedimento.

Com relação ao produto da soma pela diferença de dois termos, tópico 11.3, ocorre o mesmo que ocorreu para o quadrado da diferença de dois termos, exceto com relação ao apelo ao aritmético.

Figura 12 – Produto da soma pela diferença de dois termos

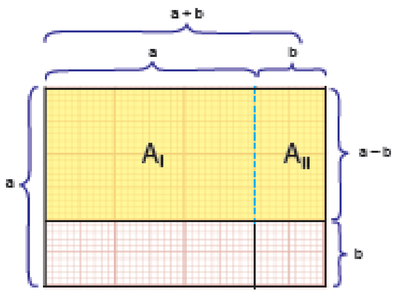
11.3 Produto da soma pela diferença de dois termos

Pela distributiva, temos: $(a+b).(a-b) = a.a + a.(-b) + b.a + b.(-b)$

$$= a^2 - ab + a.b - b^2$$

$$(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$$

Geometricamente, equivale à medida de uma área de superfície retangular de dimensões $(a + b)$ e $(a - b)$:



Portanto, a medida da área procurada é:

$$(a+b).(a-b) = \underbrace{a(a-b)}_{A\,I} + \underbrace{b(a-b)}_{A\,II} = a^2 - a.b + b.a - b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Práxis

Laboratório do produto da soma pela diferença. Acompanhe as instruções na página 130 e monte geometricamente esse produto.

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 1, p. 114

3.1.9 Análise do conteúdo "Cubo da soma de dois termos" e "Cubo da diferença de dois termos"

Figura 13– Cubo da soma de dois termos

11.4 Cubo da soma de dois termos

Assim como vimos nos exercícios anteriores, poderemos também aqui aplicar a distributiva para encontrarmos os resultados.

Siga o exemplo 1.

$(x + 3)^3 = (x + 3)\ (x + 3)^2 = (x + 3)\ (x^2 + 6x + 9)$, pela distributiva: $x^3 + 6x^2 + 9x + 3x^2 + 18x + 27$.

Agrupando os termos semelhantes, temos:

$(x + 3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$, que é o resultado.

Podemos resolver o produto $(x + 3)^3$ usando o triângulo de Pascal, que recebeu esse nome devido ao francês Blaise Pascal (1623 – 1621).

Vamos aprender a construí-lo e a utilizá-lo

Observe o triângulo:

1

1 + 1

1 + 2 + 1

1 + 3 + 3 + 1

1 4 6 4 1

Continue o triângulo por três linhas.

Observe:

$(x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$

$(x - y)^2 = 1x^2 - 2xy + 1y^2$

1ª) Você percebe alguma relação entre os coeficientes do produto notável e as linhas do Triângulo de Pascal?

2ª) Já sabemos que $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Observe que poderíamos escrever x^2 como produto de x . y, em que o expoente de x seria 2, e o de y seria zero ($x^2 = x^2y^0$).

Você concorda? Por que y^0 não altera o número?

Então:

$(x + y)^2 = x^2y^0 + 2x^1y^1 + x^0y^2$

Temos algumas observações, analisando os expoentes **x** e y em cada termo:

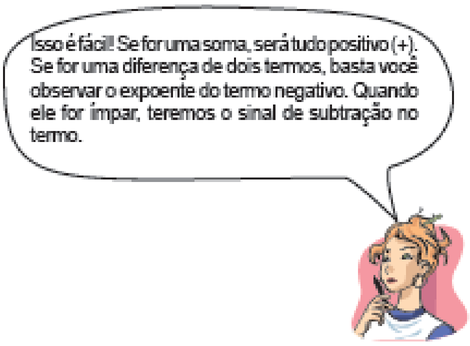
1ª) Em todos os termos, a soma dos expoentes de x e y sempre é igual a dois. Repare:

$x^2y^0 \Rightarrow 2 + 0 = 2$

$x^1y^1 \Rightarrow 1 + 1 = 2$

$x^0y^2 \Rightarrow 0 + 2 = 2$

2ª) Os expoentes de x são decrescentes (x^2; x^1 e x^0) e os de y são crescentes (y^0; y^1 e y^2), respectivamente, em cada termo.



Acompanhe o resultado de $(x - y)^2$, calculando não pela distributiva mas sando o Triângulo de Pascal.

$$(x - y)^2 = 1x^2y^0 - 2x^1y^1 + 1x^0y^2$$

Neste caso, o 2º termo (y) é negativo. Portanto, onde o expoente do segundo termo (y) for **ímpar**, o sinal do termo será **negativo**. Observe que o termo 2xy será o único negativo, pois, nos demais, o expoente de y é par.

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 1, p. 117-118

No tratamento desse tópico, a potência do polinômio foi desenvolvida, inicialmente, a partir da propriedade distributiva, e, em seguida, foram introduzidos outros elementos: o Triângulo de Pascal e a fala nos balões, que tem o objetivo de facilitar os cálculos – o que também é importante no ensino – mas não conduz à necessidade e à essência, ou seja, ao pensamento teórico. O mesmo tratamento é dado à apresentação do conteúdo *cubo da diferença*, tópico 11.5.

Figura 14– Cubo da diferença de dois termos

11.5 Cubo da diferença de dois termos

Tanto no cubo da soma, como no cubo da diferença de dois termos, podemos aplicar, além do triângulo de Pascal, a propriedade distributiva. Acompanhe o exercício resolvido a seguir.

Desenvolva os produtos notáveis:

a) $(x + y)^3$
b) $(x - 2)^3$

Resolução:
a) $(x + y)^3$
• Como o expoente é três (**3**), devemos buscar os coeficientes dos termos na 4ª linha do Triângulo de Pascal (1, 3, 3, 1). Em todos os termos aparecerão **x** e **y**, sendo que o grau de **x** é decrescente de 3 até 0, enquanto o grau de **y** em cada termo será crescente de 0 a 3.
• Como os dois termos são positivos, todos os termos também o serão.
$(x + y)^3 = \mathbf{1}x^3y^0 + \mathbf{3}x^2y^1 + \mathbf{3}x^1y^2 + \mathbf{1}x^0y^3$,
mas $y^0 = x^0 = 1$, e o resultado será:

$$\mathbf{(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$$

b) $(x - 2)^3$

• Os coeficientes dos termos serão os mesmos da letra anterior (1, 3, 3, 1), já que o grau é o mesmo.

• Observe que o segundo termo (2) é negativo. Portanto os termos em que ele estiver elevado a expoente ímpar serão negativos também.

$(x - 2)^3 = + \mathbf{1}x^3 \,.\, 2^0 - \mathbf{3}x^2 \,.\, 2^1 + \mathbf{3}x^1 \,.\, 2^2 - \mathbf{1}\, x^0 \,.\, 2^3$
$(x - 2)^3 = \quad x^3 \,.\, 1 \;- 3x^2 \,.\, 2 \;+ 3x \;.\, 4 \;- \;.1 \;.\, 8$
$\mathbf{(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 1, p. 118

Em todos os tópicos que se referem aos produtos notáveis, embora haja a intenção de trazer algum significado numa situação geométrica, a ênfase recai sobre a linguagem simbólica e os procedimentos, que são nexos externos do conteúdo. Freitas e Libâneo (2013) entendem que para se formar o pensamento conceitual teórico-científico do aluno deve-se orientá-lo a generalizações próprias da gênese constitutiva do objeto de estudo, chegando a conceitos essenciais que superam aqueles que circundam as aparências do objeto.

3.1.10 Análise do conteúdo "Fatoração de expressões"

O bloco de conteúdos de número 12, intitulado "Fatoração de expressões" encontra-se no volume 2 do caderno do Sistema CNEC e é composto por apenas 3 seções: 12.1 Curiosidades sobre números, 12.2 Definição de fatoração, 12.3 Casos de fatoração.

Quadro 8–Análise do tema: Fatoração de Expressões

<table>
<tr><th>Conteúdo</th><th>Observações</th><th>Unidades de análise</th></tr>
<tr><td>12.1 Curiosidades sobre números</td><td>a) Abordagem lógico-histórica sem deixar clara a relação com o assunto que será abordado</td><td>3</td></tr>
<tr><td>12.2 Definição</td><td>a) Busca realizar uma abordagem do significado da fatoração.
b) Estabelece relação com o algoritmo da multiplicação.
c) Utiliza exemplos aritméticos para familiarizar o aluno.</td><td>1
2
5.2.3
5.4.5</td></tr>
<tr><td>12.3 Casos de fatoração</td><td>a) utiliza recursos geométricos-visuais para justificar os aspectos lógico-simbólicos do conteúdo.
b) Busca dar significado ao método do "fator comum"
c) Recorre a exemplos da aritmética.</td><td>2
4
5.2.3.2</td></tr>
<tr><td>2º caso: Agrupamento</td><td rowspan="5">a) Abordagem baseada na aplicação das propriedades das operações.
b) Valoriza os procedimentos.
c) Abordagem lógico-simbólica.</td><td rowspan="5">4
5.1.4
5.2.4.1</td></tr>
<tr><td>3º caso: Diferença de quadrados</td></tr>
<tr><td>4º caso: Trinômio do quadrado perfeito</td></tr>
<tr><td>5º caso: Trinômio do 2º grau</td></tr>
<tr><td>6º caso: Soma ou diferença de cubos</td></tr>
</table>

Figura 15– Fatoração de expressões

FATORAÇÃO DE EXPRESSÕES

12. FATORAÇÃO

12.1 Curiosidades sobre números

Saiba mais

Conta-se que, na Grécia, por volta de 530 a.C., existiu a sociedade secreta dos pitagóricos, assim chamada em homenagem ao matemático e filósofo Pitágoras, o fundador dessa sociedade.

Pitágoras costumava dizer que "tudo é número". Para ele, qualquer fato da natureza poderia ser explicado por meio de números. Pitágoras passou essa paixão pelos números aos seus seguidores, que descobriram muitas propriedades numéricas, algumas bastante curiosas.

Descobriram, por exemplo, que, pela análise da soma dos divisores de um número, seria possível dizer se esse número era perfeito, deficiente ou excessivo.

Perfeito: quando a soma dos divisores do número, exceto ele mesmo, resulta no próprio número. É o caso do número 6: os divisores são 1, 2, 3 e 6, e a soma é $1 + 2 + 3 = 6$.

Deficiente: quando a soma dos divisores, exceto ele mesmo, tiver um resultado menor que o próprio número. É o caso do 8: os divisores são 1, 2, 4 e 8 e a soma é $1 + 2 + 4 = 7$.

E o que é um número excessivo?

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 2, p. 5

No tópico 12.1 é realizada uma abordagem lógico-histórica sobre números, sem deixar clara a relação com o assunto que será abordado. Esse tipo de encaminhamento é discutido por educadores matemáticos, como Lins e Gimenez (2001), que pontuam encontrar em atividades algébricas desde a rigidez das caracterizações "puras" por conteúdos até certa despreocupação em identificar, do ponto de vista do conteúdo, que tipo de atividade matemática particular está acontecendo. Para eles, não se pode esquecer que há um saber institucional do qual a educação matemática deve se ocupar, e, se há propostas de educação algébrica que parecem não se preocupar com isso, é porque seus defensores acreditam que ao longo do tempo esse saber deve aparecer naturalmente ou por direcionamento do professor. Dentro da tradição da Teoria Histórico-Cultural o ensino adequadamente organizado e intencional é capaz de promover e até acelerar a aprendizagem e o desenvolvimento dos estudantes.

3.1.11 Análise do conteúdo "Definição de Fatoração"

Figura 16– Fatoração / definição

12.2 Definição

As expressões algébricas também podem ser fatoradas. Fatorar uma expressão algébrica é escrevê-la na forma de multiplicação. A palavra fatoração vem de fatores de uma multiplicação.

Veja os exemplos de números e expressões fatorados:

1) $48 = 2^4 . 3$ (temos dois fatores: 2^4 e 3)
2) $5x + 15 = 5(x + 3)$ (os fatores são: 5 e $x + 3$)
3) $x^2 - 4 = (x + 2). (x - 2)$ (os fatores são: $x + 2$ e $x - 2$)

Busca

Fator qualquer número ou quantidade que ao ser multiplicado por outro, dá um produto.
Fatorar obter quantidades individuais que multiplicadas entre si deem um produto.
Dicionário de Matemática p.87

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 2, p. 7

Fatorar é um procedimento que está ligado à operação de multiplicação. Na introdução, como se vê na figura, esse significado é apresentado. Novamente a aritmética serve de exemplo para familiarizar o aluno com os procedimentos operatórios. O autor explora a semântica da palavra fatoração, a fim de significar seu ensino e aprendizagem. Assim, estão presentes as concepções de álgebra como aritmética generalizada e linguístico-sintática-semântica.

Cabe-nos ressaltar sobre a proposta de generalização a ser empreendida. Araújo (2013) apresenta, de acordo com as conjecturas de Rubinstein, que a generalização empírica se realiza por meio de destaque dos traços comuns dos fenômenos, e a generalização científica advém da delimitação dos aspectos essenciais do fenômeno em suas relações internas. Propostas de generalizações onde não há a relação motivo-necessidade-objeto abrem espaço para que não se alcance sequer a generalização empírica.

Assim, novamente está ausente a criação de uma necessidade, no caso para fatorar. Outro aspecto a considerar é que *fatorar* significa executar uma ação/operação inversa ao que se faz na multiplicação. Nessa, se vai dos fatores para o produto; na fatoração, do produto para os fatores. Esse aspecto fundamental, se não destacado, pode passar despercebido pelos alunos.

3.1.12 Análise do conteúdo "Casos de Fatoração"

O tópico 12.3 é composto por 6 casos de fatoração: *fator comum em evidência*, *agrupamento*, *diferença de quadrados*, *trinômio do quadrado perfeito*, *trinômio do 2º grau* e *soma ou diferença de cubos*.

Figura 17– Casos de fatoração I

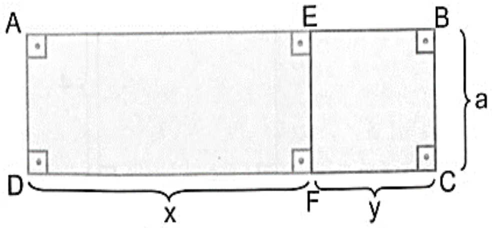
12.3 Casos de fatoração

Dividimos os casos de fatoração de acordo com a maneira que estes são feitos.

1º caso: Fator comum em evidência

Significa transformar uma expressão algébrica em produto de fatores, sendo um deles um fator que se repete nos termos da expressão.

Seja um retângulo ABCD a seguir. Ele é formado por dois retângulos menores e de mesma altura.



A área do retângulo ABCD pode ser calculada de duas maneiras.

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 2, p. 7

Figura 18– Casos de fatoração II

1ª) A_{ABCD} = base . altura

$A_{ABCD} = (x + y) . a$

2ª) A área do retângulo ABCD pode ser calculada somando as áreas dos retângulos menores AEFD e BCEF.

$A_{ABCD} = A_{AEFD} + A_{BCEF}$

$A_{ABCD} = x . a + y . a$

Dessa maneira, podemos afirmar que:

$$\underbrace{\mathbf{(x + y) . a}}_{\text{I}} = \underbrace{\mathbf{x . a + y . a}}_{\text{II}}$$

Na expressão II, temos "a" como um dos fatores que se repetem em cada termo. Na expressão I, esse fator comum está em evidência, multiplicando o fator (x + y). Quando faço esse procedimento, estou fatorando ax + ay, utilizando o caso **fator comum em evidência.**

Veja outros ecemplos:

a) $2x + 2t = 2\ (x + t)$

b) $3a + 6b = 3\ (a + 2b)$

c) $5xy - 15xy^2 = 5xy\ (1 - 3y)$

Em todos os exemplos, se aplicarmos a distributiva depois da fatoração, voltamos ao resultado inicial.

$$5xy\ (1 - 3y) = 5xy - 5xy . 3y$$
$$= \mathbf{5xy - 15xy^2}$$

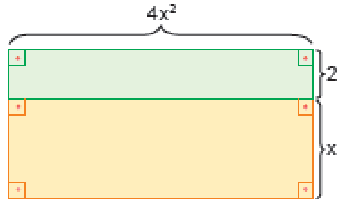
Busca

Fator comum: qualquer número ou quantidade que divide exatamente dois ou mais números ou quantidades. Por exemplo, 4 é o fator comum de 8, 12 e 36.

Dicionário de Matemática p.87

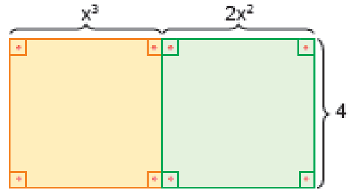
A expressão algébrica $4x^3 + 8x^2$ possui várias formas geométricas de representar o fator comum em evidência.

1ª)



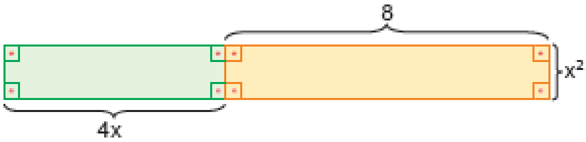
$4x^2\ (2 + x) = 8x^2 + 4x^3$

2ª)



$4x^3 + 2x^2 . 4 = 4x^3 + 8x^2$

3ª)



$4x . x^2 + 8x^2 = 4x^3 + 8x^2$

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 2, p. 8-9

A utilização de recursos geométrico-visuais para justificar os aspectos lógico-simbólicos do conteúdo parece ser a preocupação do autor no exercício apresentado, o que reforça a concepção de álgebra Fundamentalista Analógica.

O autor estabelece um significado para o caso do “fator comum em evidência” e recorre a exemplos da aritmética para chegar ao modelo de generalização do caso. Essa é uma metodologia adequada, porque, segundo Rubinstein, citado em Longarezi e Puentes (2013, p. 26) “o significado das palavras é o reflexo generalizado de um conteúdo objetivo”, para ele “a linguagem não comunica apenas um pensamento já formulado, mas também implica no processo da formação desse pensamento”.

Todos os demais casos de fatoração apresentados são marcados por uma abordagem baseada na aplicação das propriedades das operações, especialmente a propriedade distributiva, que, de fato, é fundamental no estudo das operações com as expressões algébricas. Neles, os procedimentos e os aspectos lógico-simbólicos recebem destaque. É o que se pode observar nas figuras inseridas a seguir.

No 5º caso de fatoração (trinômio do 2º grau), porém é informado dado histórico sobre demonstração realizada por Albert Girard.

Figura 19 – Agrupamento

2º caso: Agrupamento

Neste caso, a expressão possui fatores comuns, mas não a **todos os termos**.

Exemplo: $x^3 + x^2 + x + 1$ Observe que o termo **x** não apareceu em todos os termos. Como fatorá-lo?

Quando isso acontecer, colocaremos aos poucos o fator comum em evidência.

- Coloque x^2 com fator comum nos dois primeiros termos: $\mathbf{x^2 (x + 1)}$.
- Observe que o 3º e o 4º termos são exatamente o fator que apareceu $\mathbf{(x + 1)}$.
- Coloque-o novamente em evidência. **Está feita a fatoração por agrupamento.**

$\underbrace{x^3 + x^2} + \underbrace{x + 1}$

- $x^2(\mathbf{x + 1}) + (\mathbf{x + 1})$
- $(\mathbf{x + 1})\ (x^2 + 1)$

Acompanhe outro exemplo:

$$\mathbf{ax + ay + bx + by}$$

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 2, p. 9

Figura 20– Diferença de quadrados

3º caso: Diferença de quadrados

Já sabemos que todo produto

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$$

Muito bem, o 1º número dessa igualdade **já é uma expressão fatorada**.

Acompanhe o exemplo:

Vamos fatorar $x^2 - 36$.

1º) Veja se os termos que estão sendo subtraídos representam quadrados de 2 números. Para isso, basta extrair a raiz quadrada de cada um deles separadamente:

$$\sqrt{x^2} = x \qquad \sqrt{36} = 6$$

2º) A soma e a diferença dos resultados encontrados constituirão os fatores na expressão fatorada:

$x^2 - 36 = \mathbf{(x + 6)\ (x - 6)}$, está aí a forma fatorada.

Exemplo:

Fatore $x^2 - 100$.

Resolução:

Extrair a raiz quadrada de cada termo da diferença.

$\sqrt{x^2} = x \qquad \sqrt{100} = 10$

Logo, $x^2 - 100 = (x - 10)\ (x + 10)$.

Observações importantes:

a) Quando extrairmos a raiz quadrada, todas as letras que aparecerem no radicando serão **consideradas positivas.**

b) Extrair raiz quadrada é procurar um valor que elevado ao quadrado é o radicando da raiz.

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 2, p. 9

Figura 21– Trinômio do quadrado perfeito

4º caso: Trinômio do quadrado perfeito

Neste caso, continua valendo a observação que $\sqrt{x^2} = x$, pois estamos supondo sempre que $\mathbf{x > 0}$.

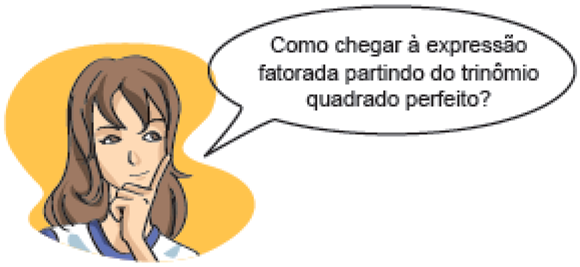
Já vimos também que:

a) o quadrado da soma vale:

$$\underbrace{(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b)}_{\text{expressões fatoradas do trinômio.}} = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\text{expressão não fatorada do trinômio do quadrado perfeito.}}$$

b) Quadrado da diferença, vale:

$$\underbrace{(a-b)^2 = (a-b)\,(a-b)}_{\text{expressões fatoradas}} = \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{\text{expressão não fatorada}}$$



1º) Nos trinômios quadrados perfeitos, temos três termos, sendo que dois deles são sempre quadrados.
2º) Extraia a raiz quadrada de cada quadrado.
3º) O terceiro termo, que não for quadrado, deverá coincidir com o dobro do produto das raízes.

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 2, p. 12

Figura 22– Trinômio do 2º grau

5º caso: Trinômio do 2º grau

Quando estivermos diante de um trinômio que não representa um quadrado perfeito, poderemos tentar fatorá-lo usando a soma e o produto do segundo termo, que compõe a fatoração.

Acompanhe um **exemplo**:

Fatore: $x^2 - 7x + 12$

Observe que não é um trinômio do quadrado perfeito pois $\sqrt{x^2} = x$; $\sqrt{12} = \sqrt{12}$ e $\mathbf{2x \cdot \sqrt{12} \neq 7x}$

No ano de 1629, o belga Albert Girard (1590-1633) demonstrou duas relações usando os coeficientes do trinômio. Seja o trinômio $ax^2 + bx + c$:

Soma dos valores de $\mathbf{x = \frac{-b}{a}}$

Produto dos valores de $\mathbf{x = \frac{c}{a}}$

Portanto, na expressão $x^2 - 7x + 12$, temos:

$a =$ 1 (coeficiente do termo x^2)
$b = -7$ (coeficiente do termo x)
$c =$ 12 (termo independente de x)

Soma dos "x" $= \frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{1} = 7$

Produto $= \frac{c}{a} = \frac{12}{1} = \mathbf{12}$

Vamos procurar dois números cujo produto seja 12 e cuja soma seja 7.

Vamos lá, temos três pares de números inteiros $\begin{cases} 1 \text{ e } 12 \\ 2 \text{ e } 6 \\ 3 \text{ e } 4 \end{cases}$

Dos três pares, analisamos agora a **soma** deles:
$1 + 12 = 13$; $2 + 6 = 8$ e $3 + 4 = 7$

Portanto os pares dos números cujo produto seja 12 e a soma seja 7 são: **3 e 4**.

Não. Para **finalizar**, a expressão fatorada de:

$ax^2 + bx + c = a(x -$ número$)$ $(x -$ outro número$)$

No nosso exemplo vem:
$x^2 - 7x + 12 = 1(x - \mathbf{3})\ (x - \mathbf{4})$

Acompanhe outro exemplo.
Fatore $x^2 - 9x + 20$.

Resolução:

$x^2 - 9x + 20$ não é trinômio do quadrado perfeito, pois $\sqrt{x^2} = x$; $\sqrt{20}$ e $2 \cdot x \cdot \sqrt{20} \neq 9x$.

Logo, para resolver devo aplicar as relações de Girard.

Coeficientes: $a = 1$; $b = -9$ e $c = 20$

- Soma: $\frac{-b}{a} \Rightarrow S = \frac{-(-9)}{1} = 9$
- Produto: $\frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{20}{1} = 20$

Quais são os números cuja soma é 9 e cujo produto é 20?

Produto, 20 temos $\begin{cases} 1 \text{ e } 20 \\ 2 \text{ e } 10 \\ 4 \text{ e } 5 \end{cases}$

Desses pares, as somas são:
$1 + 20 = 21$; $2 + 10 = 12$ e $4 + 5 = 9$

Portanto os pares procurados são **4 e 5**.

Colocando na forma fatorada:
$a(x - n^o)$ ($x -$ outro n^o) temos:
$x^2 - 9x + 20 = \mathbf{1\ (x - 4)\ (x - 5)}$

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 2, p. 14

A fatoração de expressões algébricas não é um assunto fácil de ser tratado com os alunos nesse nível, pois lida com as operações no campo abstrato e usa uma linguagem simbólica. Além disso, é difícil criar uma necessidade prática e contextualizada para seu estudo, no entanto, podem contribuir para o desenvolvimento de funções psíquicas superiores, como a atenção voluntária, a memória, a generalização e a abstração, dependendo da forma como o ensino é organizado. Por exemplo, um professor que se paute em organizar o seu ensino seguindo o proposto neste material didático, estará fornecendo ao aluno todos os passos, cabendo ao aluno repeti-los. Do mesmo modo, foram tratados os casos Trinômio do quadrado perfeito e soma ou diferença de cubos. Por esse motivo, julgamos desnecessário inclui todos esses casos.

É importante observar que, depois de tratar o caso *agrupamento* aparece uma necessidade para o estudo da fatoração, que já foi introduzido.

3.1.13 Análise do conteúdo "Equações fracionárias e literais"

A unidade de conteúdos de número 18 e 19, intitulada *Equações e sistemas* encontra-se no volume 3 do caderno do Sistema CNEC.

Quadro 9 – Análise do tema: Equações e Sistemas

Conteúdo	**Observações**	**Unidades de análise**
18. Equações fracionárias	a) Apresenta o conteúdo por meio de uma situação-problema. b) Salienta a possibilidade de se obter uma equação impossível de resolver ou de solução indeterminada. c) Apresenta uma definição para equação fracionária. d) Define Conjunto Universo e Conjunto Verdade. e) Apresenta uma sequência de etapas para resolução de uma equação fracionária.	4 5.1.2 5.2.4.1
Equações literais	a) Introduz o conteúdo por meio de problema geométrico. b) Valoriza os procedimentos. c) Abordagem lógico-simbólica. d) Caracteriza uma equação literal. e) Apresenta uma sequencia de etapas para resolução de uma equação literal.	4 5.2.3.2 5.1.4
19. 1 Resolução e classificação dos sistemas	a) Introduz o conteúdo por meio da análise de uma balança de dois pratos. b) Utiliza a linguagem algébrica para representar o conteúdo de cada balança. c) Utiliza o método da substituição e o método da adição para resolver os sistemas dados como exemplos. d) Apresenta a classificação dos sistemas, de acordo com o tipo de solução encontrada.	4 5.2.3 5.3.2
19. 2 Solução gráfica de sistemas	a) Apresenta um sistema e utiliza uma tabela com duas variáveis para as quais atribuiu valores arbitrários. b) Traçou os gráficos no plano cartesiano. c) Associou o tipo de solução dos sistemas à posição das retas.	4 5.2.3.2

Figura 23– Equações fracionárias e literais I

EQUAÇÕES E SISTEMAS

18. EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS E LITERAIS

Equações fracionárias

Observe estes problemas:

1º) Marcelo e Ramon têm, juntos, 2 560 CDs de jogos. Resolveram catalogá-los em dois cadernos, distribuindo-os igualmente, de modo que cada página ficasse com 20 jogos, sem sobrar páginas. Um dos cadernos tem 8 páginas a mais que o outro. Quantos jogos caberão no caderno menor?

• Para resolver esse problema, precisamos nomear as incógnitas e separar as informações que são dadas daquilo que é pedido.

x: nº de páginas no caderno menor.

x + 8: nº de páginas do outro caderno

total de jogos $\Rightarrow$ 2 560

jogos por página: 20

Pede-se: nº de jogos no catálogo menor $\Rightarrow$ 20x

Equacionando: nº de CDs em cada caderno, quando somados é igual ao total de jogos.

$20 \cdot x + 20(x + 8) = 2\,560$

$20x + 20x + 160 = 2\,560$

$40x = 2\,560 - 160$

(I) $x = \dfrac{2\,400}{40} \Rightarrow x = 60 \Rightarrow 20x = 1\,200$

R: O menor caderno ficará com 1 200 jogos.

Observe que a equação **40x = 2 400** foi **possível** de ser resolvida. Mas, se a equação fosse do tipo **0x = b**, em que **b** é um número diferente de zero, teríamos uma **equação impossível**, e a solução seria vazia. Por exemplo, **0x = 4** $\Rightarrow S = \varnothing$ (Impossível!)

Entretanto, se a equação fosse **0x = 0**, teríamos uma **equação indeterminada**, isto é, **qualquer valor** de “**x**” verificaria a equação e pertenceria à solução dela.

Observe este outro problema:

2º) O projeto *Criança na Quadra* distribuiu 160 bolas em algumas quadras de comunidades carentes. No dia da distribuição, apareceram mais duas inscrições no projeto, de modo que cada quadra recebeu apenas 16 bolas. Inicialmente, quantas quadras foram inscritas no projeto?

Resolução:

• Indicaremos por **x** o número de quadras inscritas no dia da distribuição.

• A equação que traduz o problema é:

$$\frac{160}{x} = 16 \text{ (II)}$$

• Observe que a incógnita **x** está no **denominador**, logo $x \neq 0$.

Resolvendo, temos:

$\dfrac{160}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} = 16 \cdot x$

$160 = 16x \Rightarrow \dfrac{160}{16} = x$

x = 10 $\Rightarrow$ Como $x \neq 0$, temos 10 como a solução da equação.

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 3, p. 40

Figura 24– Equações fracionárias e literais II

• Como no dia aumentaram duas quadras, o número inicial seria $x - 2 \Rightarrow 10 - 2 = 8$ **quadras**.

R: Inicialmente, havia oito quadras.

Você percebeu alguma diferença entre a equação **I** (do primeiro problema) e a **II** (do segundo)?
Repare que, na equação II, a incógnita aparece no denominador da fração, isso faz com que tenhamos uma **equação fracionária**.

Definindo: A **equação fracionária** é toda igualdade que apresenta pelo menos uma incógnita no denominador.

Qual seria a diferença na resolução das equações **I** e **II**?
Basicamente nenhuma, a não ser pela condição de existência que deve ser determinada nas equações fracionárias: faça sempre o **denominador diferente de zero**, para determinar os valores que poderão ou não fazer parte da solução da equação.

Acompanhe estes exemplos:

Resolva as equações fracionárias:

a) $\frac{1}{x} + 4 = \frac{9}{2}$, sendo U = $\mathbb{R}$ (conjunto universo é igual aos Reais)

b) $\frac{5}{2} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{6x+2}{2x+2}$, sendo U = $\mathbb{Z}$ (conjunto universo igual aos Inteiros).

• **Conjunto verdade** é o conjunto formado pelas soluções das equações.
• **Conjunto universo** é o conjunto em que a equação está definida, ou seja, é o conjunto a que pertencem todos os elementos com os quais estaremos trabalhando. A solução da equação deverá pertencer a esse conjunto.

Resolução:

a) $\frac{1}{x} + 4 = \frac{9}{2}$, sendo U = $\mathbb{R}$.

1º) Condição de existência: $x \neq 0$ (denominador não nulo).
2º) Mínimo múltiplo comum dos denominadores: m.m.c. (x, 1, 2) = 2x
3º) Monte a equação equivalente à original com denominador 2x:

$$\frac{1}{x} + 4 = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{1 \cdot 2}{2x} + \frac{4 \cdot 2x}{2x} = \frac{9 \cdot x}{2x}$$

$\frac{2 + 8x}{\cancel{2x}} = \frac{9x}{\cancel{2x}} \Rightarrow$ feita a condição de existência, posso **cortar** os denominadores (que significa multiplicar a equaçao nos dois membros por 2x).

2 + 8x = 9x (subtraia 8x nos 2 membros)

$$2 + \underbrace{8x - 8x}_{0} = 9x - 8x$$

$$2 = x$$

4º) Verifique se a solução encontrada satisfaz a condição de existência e se pertence ao conjunto universo, determinando o conjunto verdade (ou soluçao) da equaçao.

Como **x = 2** é compatível com **x ≠ 0**, e é um número real, portanto:

V = {2}

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 3, p. 41

Neste tópico, o conteúdo é apresentado por meio de uma situação-problema, e pela primeira vez, nesta série, é utilizada a palavra *incógnita* para designar um valor desconhecido, porém não foi atribuído nenhum significado a esta nova palavra. Segundo Vigotski (2010), um significado não estudado é como uma face oculta da Lua, e é exatamente nele que se encerra a possibilidade de solução das questões que dizem respeito à relação entre o pensamento e a linguagem.

Ao tratar das equações fracionárias é fornecida uma definição para esse tipo de equações a partir de seu aspecto externo (presença de pelo menos uma incógnita no denominador). Também é enfatizada a possibilidade de se obter uma equação impossível de resolver ou de solução indeterminada. São definidos Conjunto Universo e Conjunto Verdade, e apresentada uma sequência de etapas para resolução de uma equação fracionária.

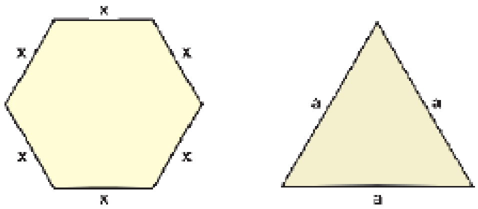
A concepção de álgebra que figura nessa abordagem é a da álgebra como procedimento para resolver certos tipos de problemas.

Nas figuras inseridas anteriormente, podemos observar alguns aspectos e fazer algumas inferências, tendo em vista a relação pensamento e linguagem. Além do uso do termo *incógnita*, já comentado anteriormente, outros são utilizados, a exemplo de *condição de existência, equação impossível*, *equação indeterminada*, *mínimo múltiplo comum dos denominadores (m.m.c),* e também não são suficientemente tratados entre si, porque se apresentam como um conjunto de conceitos, cujos significados não estão explícitos e para os quais não se estabelecem relações. No cálculo do *m.m.c*, faz-se uma fatoração e não se relaciona com o estudo anterior, cuja necessidade não foi discutida. Assim, cabe perguntar: como os significados serão partilhados e os sentidos construídos? Ao organizar o seu ensino, utilizando esse material, o professor terá que atentar para esses aspectos, pois se os significados não são suficientemente explorados e compartilhados, a sua internalização pode ficar comprometida.

Figura 25 – Equações literais I

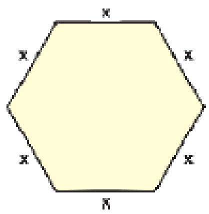
Equações literais

Artur desenhou os seguintes polígonos regulares:



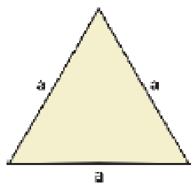
Ele percebeu que o perímetro deles era igual e quis determinar **x**. Vamos ajudá-lo?

Você sabe que o perímetro é a soma das medidas dos lados. Portanto, temos:



$2p = x + x + x + x + x + x$

$2p = 6x$



$2p = a + a + a$

$2p = 3a$

Como são iguais, temos: $\mathbf{6x = 3a}$

É Artur, para isolar **x**, temos:

$$x = \frac{\cancel{3}a}{\cancel{6}} \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

Portanto, a solução do seu problema é: $x = \frac{a}{2}$.

Ou seja, cada lado do hexágono deverá ser a metade do lado do triângulo para que eles tenham o mesmo perímetro.

A equação $\mathbf{6x = 3a}$ é chamada de **equação literal** e é resolvida da mesma maneira que as equações já estudadas até aqui.

Toda equação literal, além da incógnita, apresentará uma ou mais letras denominadas de **parâmetros**.

Parâmetros – Em uma expressão ou equação, letra distinta da variável, cujo valor numérico pode ser fixado arbitrariamente. (www.dicio.com.br/parametro/)

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 3, p. 44-45

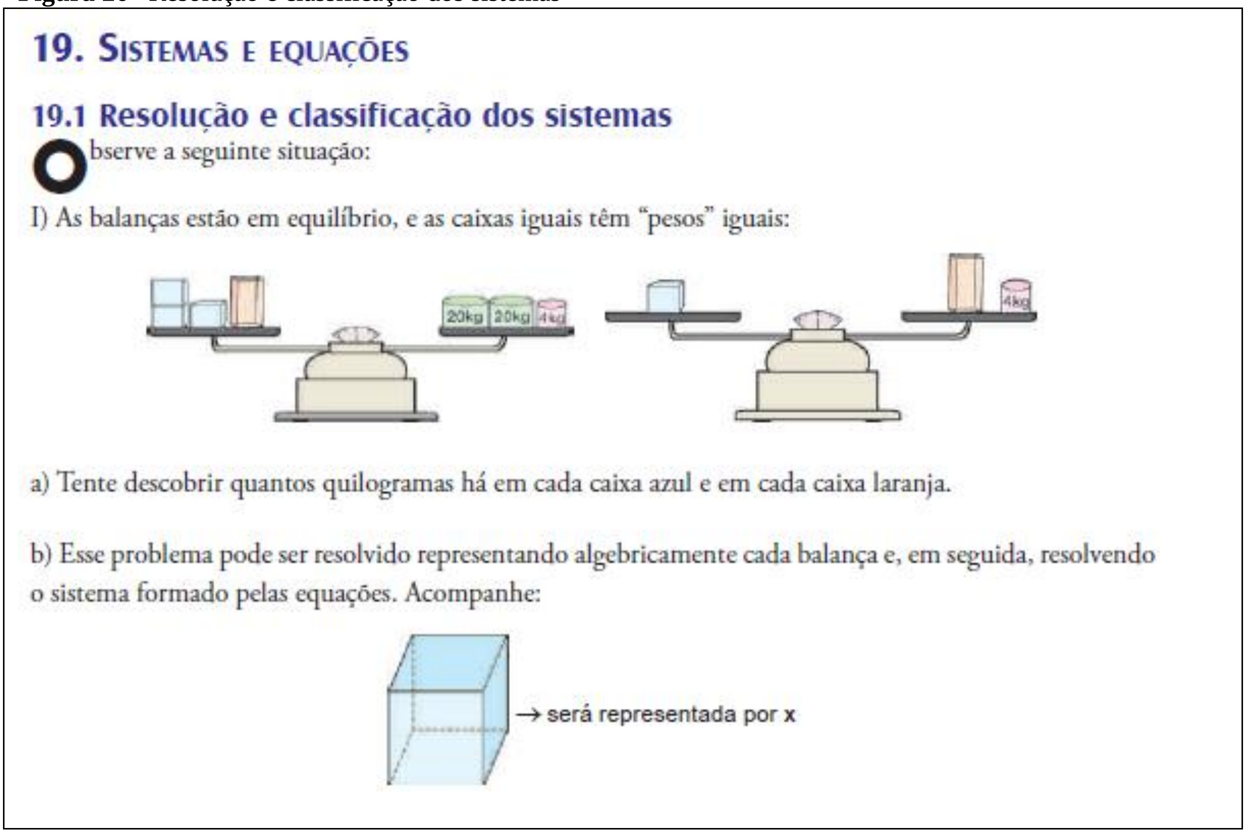
As equações literais foram introduzidas por meio de um problema geométrico que trata do cálculo de perímetro reforçando a concepção de álgebra Fundamentalista-analógica já verificada em outros tópicos.

Novamente a ênfase recai sobre os símbolos e os procedimentos. Após caracterizar as equações literais partir de seus aspectos externos é apresentada uma sequência de etapas para resolução desse tipo de equação. Aos símbolos são aplicadas propriedades das operações com certo grau de formalismo o que nos leva identificar também a concepção de álgebra como estudo das estruturas.

3.1.14 Análise do conteúdo "Sistemas e equações"

O bloco de conteúdos de número 19, intitulado *Sistemas e equações*, iniciado no bloco anterior, encontra-se no volume 3 e é o último que analisaremos do caderno do Sistema CNEC. O bloco está subdividido em 2 seções: 19.1 *Resolução e classificação dos sistemas*, 19.2 *Solução gráfica de sistemas*.

Figura 26– Resolução e classificação dos sistemas



19. SISTEMAS E EQUAÇÕES

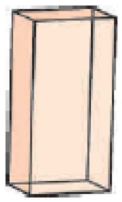
19.1 Resolução e classificação dos sistemas

Observe a seguinte situação:

I) As balanças estão em equilíbrio, e as caixas iguais têm "pesos" iguais:

a) Tente descobrir quantos quilogramas há em cada caixa azul e em cada caixa laranja.

b) Esse problema pode ser resolvido representando algebricamente cada balança e, em seguida, resolvendo o sistema formado pelas equações. Acompanhe:



→ será representada por y

A 1ª equação será a primeira balança: $3x + y = 44$.

A 2ª equação será a segunda: $x = y + 4$.

Para resolver o sistema, vamos usar o método de substituição:

$$\begin{cases} 3\mathbf{x} + y = 44 \\ \mathbf{x} = y + 4 \end{cases}$$

$3(y + 4) + y = 44$

$3y + 12 + y = 44$ (– 12 nos dois membros da equação).

$4y = 32$ (: 4)

$$\mathbf{y = 8}$$

Agora, escolhemos uma das equações e encontramos o valor de **x** substituindo o valor de **y** encontrado na equação escolhida.

$x = y + 4$

$y = 8 \Rightarrow x = 8 + 4$

$$\mathbf{x = 12}$$

Portanto, a caixa azul pesa 12 kg, e a laranja, 8 kg.

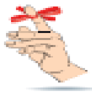
Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 3, p. 50

No tópico 19.1 é apresentada uma balança de dois pratos em analogia às equações, na qual os conteúdos dos pratos são expressos em linguagem algébrica. A utilização de recursos como este é identificada por Lins e Gimenez (2001) como abordagem "Letrista facilitadora", na qual o adjetivo "facilitadora" não tem um sentido muito otimista. Segundo eles, apesar de tornar o processo de ensino-aprendizagem mais agradável e amenizar os problemas causados pelas práticas da concepção "letrista" tradicional, essa proposta acredita que a manipulação de "concretos" é transformada, por abstração, em atividade formal; o que não é necessariamente verdade.

Na sequência (Fig. 27, 28 e 29), são recordados os métodos de resolução de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, e classificação dos sistemas de acordo com o tipo de solução encontrada.

Nos sistemas apresentados, nota-se uma preocupação em estabelecer relação entre as incógnitas utilizadas e o que elas representam na situação-problema a ser resolvida; valorizando a dimensão semântica apontada na concepção Linguístico-sintático-semântica.

Figura 27–Classificação dos sistemas



Você se lembra...

Um sistema de equações poderá ser resolvido usando o método da adição, comparação ou substituição.

Acompanhe o exemplo a seguir em que resolveremos o problema utilizando o método da adição.

Na sua festa, Tales precisa acomodar 70 convidados em 15 mesas no salão. Sua mãe sugeriu que ele colocasse algumas mesas com lugares para 6 convidados e outras para 4 convidados, de modo que todos os lugares fossem ocupados. Quantas mesas ficaram com 6 lugares? Quantas com 4 lugares?

Resolução:

Vamos nomear as incógnitas:

X : número de mesas com 6 lugares

Y : número de mesas com 4 lugares

As equações seriam:

- total de convidados : $x.6 + y.4 = 70$
- total de mesas : $x + y = 15$

Pelo método da adição vamos multiplicar a equação II por -4:

$$(II) . (-4) = \begin{cases} 6x + 4y = 70 \ (I) \\ \underline{-4x + (-4)y = -60} \ + \\ 2x \qquad\quad = 10 \end{cases}$$

$$\mathbf{x = 5}$$

Substituindo x na equação II:

$x + y = 15 \Rightarrow 5 + y = 15 \Rightarrow \mathbf{y = 10}$

Resposta: Teríamos 5 mesas de 6 lugares e 10 mesas de 4 lugares.

Agora, no seu caderno, resolva o mesmo sistema utilizando o método da comparação e da substituição.

Classificação de um sistema

Podemos classificar um sistema de acordo com a solução que apresenta.

1) Sistema possível determinado – possui uma única solução.

2) Sistema possível indeterminado – possui infinitas soluções.

3) Sistema impossível – não possui soluções.

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 3, p. 51

A seguir, é discutido o tópico 19.2 que trata da *solução gráfica dos sistemas* de equações.

Figura 28 – Solução gráfica de sistemas I

19.2 Solução gráfica de sistemas

Podemos representar graficamente um sistema

Seja o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 5x - y = 10 \end{cases}$

Para resolvê-lo graficamente, vamos nomear a 1ª equação de reta **s** e a 2ª, de reta **r**.

Em seguida, vamos desenhar nos eixos cartesianos essas duas retas. Para isso, construiremos uma tabela para cada equação. Para facilitar, escolha valores pequenos para x e y. Acompanhe:

Reta s: $3x + 2y = 6$

x	y
0	$3 \cdot 0 + 2 \cdot y = 6 \Rightarrow y = 3$
1	$3 \cdot 1 + 2 \cdot y = 6 \Rightarrow y = 1{,}5$

Reta r: $5x - y = 10$

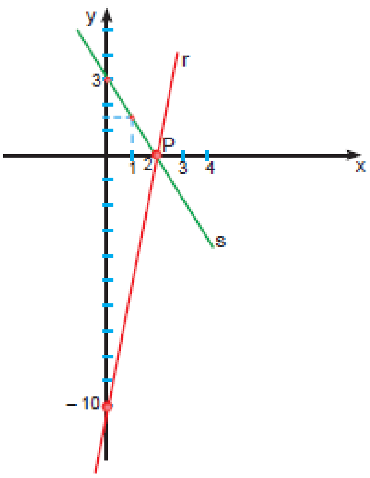
x	y
0	$5 \cdot 0 - y = 10 \Rightarrow y = -10$
2	$5 \cdot 2 - y = 10 \Rightarrow y = 0$

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 3, p. 53

Figura 29– Solução gráfica de sistemas II

Com os pontos da tabela, vamos marcá-los no mesmo eixo de coordenadas cartesianas.

Escolhemos apenas dois valores para **x**, pois a equação é de 1º grau, seu gráfico é uma reta (para traçar a reta bastam dois pontos distintos).

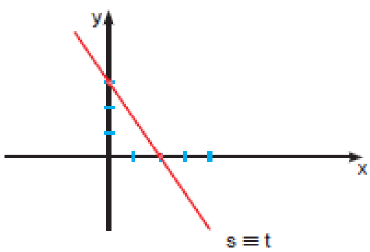


Sistema resolvido anteriormente $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \Rightarrow \text{reta } \mathbf{s} \\ 5x - y = 10 \Rightarrow \text{reta } \mathbf{t} \end{cases}$

S = (2, 0)

2º) Sistema possível indeterminado: possui infinitas soluções. Nesse caso, as retas são coincidentes. Temos todos os pontos comuns.

Exemplo:



$\begin{cases} 3x + 2y \rightarrow 6\text{: reta } \mathbf{t} \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} \rightarrow 1\text{: reta } \mathbf{s} \end{cases}$

Determine o ponto de encontro das duas retas.

Como neste exemplo as retas são **concorrentes**, teremos **uma única solução** para o sistema.

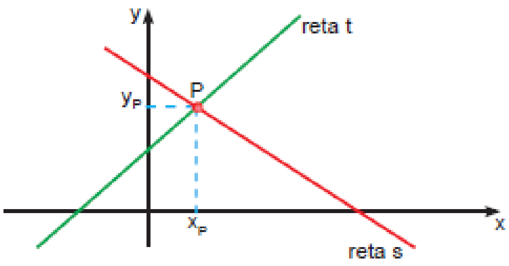
Esse sistema é denominado **sistema possível e determinado**. Sua solução foi o ponto P(2, 0). Verifique que a solução x = 2 e y = 0 é a solução das equações do sistema.

A solução do sistema pode ser dada usando o par ordenado (x, y).

E podemos também classificar o sistema de acordo com a sua representação geométrica.

1ª) Sistema possível determinado: possui uma única solução. As retas (equações) são concorrentes.

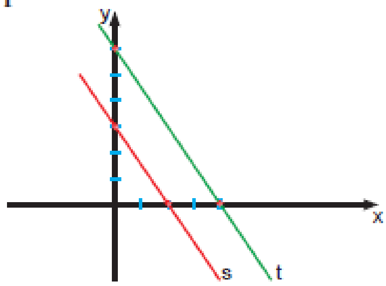
Exemplo:



reta r X reta t

3ª) Sistema impossível: Não possui soluções. As retas, quando traçadas, são paralelas. Elas não têm ponto em comum.

Exemplo:



s // t

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12\text{: reta t} \\ 3x + 2y = 6\text{: reta s} \end{cases}$$

Veja a solução algébrica:

$$x(-1)\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ -3x - 2y = -6 \end{cases}$$
$$\overline{0x + 0y = 6}$$
$$0 \ = 6 \ \text{(impossível)}$$

Fonte: SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, 8º ano, v. 3, p. 549

O tópico é iniciado com um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas apresentado em linguagem simbólica. É apresentada uma sequência de procedimentos para a resolução gráfica do sistema: nomeia as equações, constrói uma tabela com duas variáveis para as quais atribui valores arbitrários, marca pontos obtidos na tabela no plano cartesiano, traça as retas correspondentes.

Aqui entra uma questão importante no estudo da álgebra, que é o seu “casamento” de fato com a geometria, constituindo-se em outro campo, a Geometria Analítica, que será estudada no ensino médio. Trata-se agora não de uma ilustração, mas de outra forma de representação. São registros diferentes de um mesmo objeto matemático, ou seja, formas diferentes de significar o mesmo objeto. Nesse sentido, cabem outras discussões que não é objetivo desse estudo fazê-las, mas tão somente pontuar. É necessário organizar o ensino de modo que o aluno perceba que se trata de um mesmo objeto, porém representado em campos diferentes.

Logo após são apresentadas outras representações gráficas de acordo com a classificação do tipo de sistema: determinado, indeterminado e impossível.

Esse tópico traz informações relevantes, porém carece de objetivos explícitos. Davidov (1999, p. 3) expõe seu ponto de vista acerca do estudo e de seus objetivos:

> A atividade de estudo e o objetivo de estudo a ela correspondente estão ligados, antes de tudo, com a transformação do material quando, para além de suas particularidades exteriores, se pode descobrir, fixar e estudar o princípio interno ou essencial do material a ser assimilado e, desse modo, compreender todas as manifestações externas desse material.

3.2 Análise do livro didático – Vontade de Saber Matemática - 8º ano

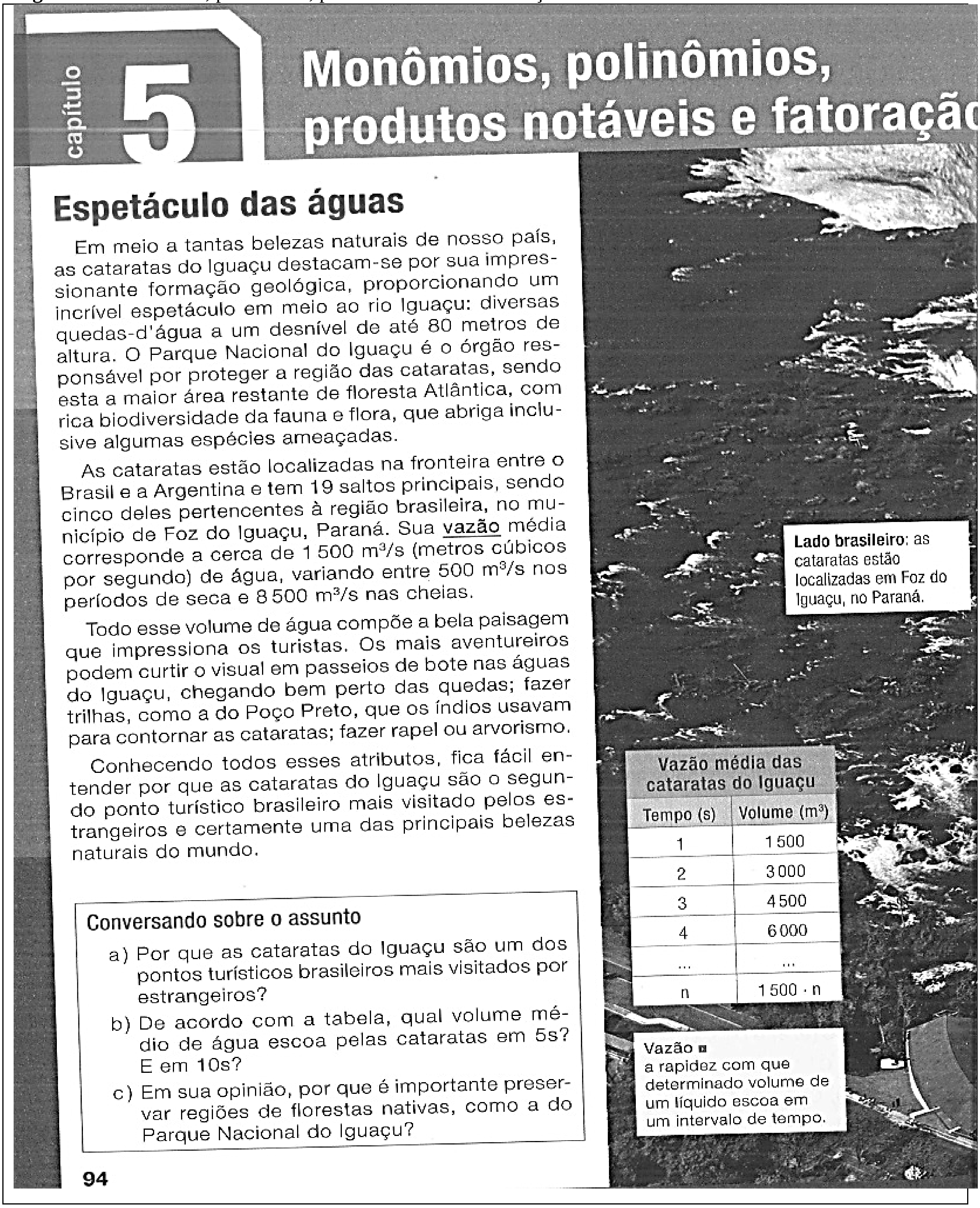
3.2.1 Análise do conteúdo "Monômios, polinômios, produtos notáveis e fatoração"

Quadro 10– Análise do tema: Monômios, polinômios, produtos notáveis e fatoração

Conteúdo	**Observações**	**Unidades de análise**
Monômios, polinômios, produtos notáveis e fatoração	a) Inicia o capítulo falando das Cataratas do Iguaçu, interligando o conhecimento matemático com o de outras ciências. b) Busca dar significado à palavra "vazão", que é a ponte entre o contexto da geografia com o da matemática, no texto apresentado. c) Apresenta os principais dados numéricos do texto em uma tabela com duas variáveis interdependentes, mas não menciona o conceito de função.	1 2 3 5.1.3 5.3.3 5.4.4
Expressões algébricas	a) Introduz o conteúdo por meio da análise de uma balança digital. b) Utiliza a linguagem algébrica para representar o conteúdo de cada balança. c) Explica "valor numérico" do ponto de vista dos procedimentos. d) Define expressões algébricas como expressões onde letras aparecem no lugar de números. e) Define Álgebra como parte da Matemática que estuda o emprego de letras para representar números. f) Faz um apanhado do surgimento da álgebra e a contribuição das diferentes culturas. Destaca o surgimento da álgebra simbólica. g) Informa sobre o surgimento das balanças. h) faz nota explicativa sobre algumas convenções próprias da linguagem algébrica.	3 4 5.1.3 5.2.3 5.3.1 5.3.2 5.4.6

Monômios	a) Utiliza recursos geométricos. b) Valoriza os aspectos externos do conteúdo por meio da caracterização dos monômios. c) Destaca as partes que compõem um monômio d) Define monômios semelhantes, nulo e grau de monômios. e) As letras são tratadas como variáveis.	4 5.1.4 5.2.3.2
Adição e subtração com monômios	a) Introduz o conteúdo por meio de uma situação-problema. b) Utiliza recursos geométricos c) Apresenta a resposta final da situação problema em termos de xy d) Dá exemplos de simplificação de monômios semelhantes por meio da adição e subtração de coeficientes.	4 5.1.2 5.1.4 5.2.3.2
Multiplicação com monômios	a) Introduz o conteúdo por meio de uma situação-problema. b) Utiliza recursos geométricos c) Apresenta a resposta final da situação problema em termos de x d) Dá exemplos de multiplicação de monômios.	4 5.1.2 5.1.4 5.2.3.2
Divisão com monômios	a) Introduz o conteúdo por meio de uma expressão algébrica b) Dá exemplos de divisão de monômios. c) Realiza uma abordagem baseada em procedimentos e no transformismo algébrico	4 5.1.4
Potenciação com monômios	a) Utiliza recursos geométricos. b) Dá exemplos de potenciação com monômios.	4 5.1.4

Figura 30– Monômios, polinômios, produtos notáveis e fatoração



capítulo 5

Monômios, polinômios, produtos notáveis e fatoração

Espetáculo das águas

Em meio a tantas belezas naturais de nosso país, as cataratas do Iguaçu destacam-se por sua impressionante formação geológica, proporcionando um incrível espetáculo em meio ao rio Iguaçu: diversas quedas-d'água a um desnível de até 80 metros de altura. O Parque Nacional do Iguaçu é o órgão responsável por proteger a região das cataratas, sendo esta a maior área restante de floresta Atlântica, com rica biodiversidade da fauna e flora, que abriga inclusive algumas espécies ameaçadas.

As cataratas estão localizadas na fronteira entre o Brasil e a Argentina e tem 19 saltos principais, sendo cinco deles pertencentes à região brasileira, no município de Foz do Iguaçu, Paraná. Sua vazão média corresponde a cerca de 1 500 m^3/s (metros cúbicos por segundo) de água, variando entre 500 m^3/s nos períodos de seca e 8 500 m^3/s nas cheias.

Todo esse volume de água compõe a bela paisagem que impressiona os turistas. Os mais aventureiros podem curtir o visual em passeios de bote nas águas do Iguaçu, chegando bem perto das quedas; fazer trilhas, como a do Poço Preto, que os índios usavam para contornar as cataratas; fazer rapel ou arvorismo.

Conhecendo todos esses atributos, fica fácil entender por que as cataratas do Iguaçu são o segundo ponto turístico brasileiro mais visitado pelos estrangeiros e certamente uma das principais belezas naturais do mundo.

Conversando sobre o assunto

a) Por que as cataratas do Iguaçu são um dos pontos turísticos brasileiros mais visitados por estrangeiros?

b) De acordo com a tabela, qual volume médio de água escoa pelas cataratas em 5s? E em 10s?

c) Em sua opinião, por que é importante preservar regiões de florestas nativas, como a do Parque Nacional do Iguaçu?

Lado brasileiro: as cataratas estão localizadas em Foz do Iguaçu, no Paraná.

Vazão média das cataratas do Iguaçu

Tempo (s)	Volume (m^3)
1	1 500
2	3 000
3	4 500
4	6 000
...	...
n	1 500 · n

Vazão ▪ a rapidez com que determinado volume de um líquido escoa em um intervalo de tempo.

94

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 94

O capítulo é introduzido por meio de um texto que trata das Cataratas do Iguaçu, no qual são colocados em relevo alguns dados numéricos sobre as quedas d’água. O texto interliga o conhecimento matemático com o de outras ciências, e destaca o significado da palavra "vazão", que é a ponte entre o contexto da geografia com o da matemática.

Os dados numéricos relativos à vazão foram organizados em uma tabela, com duas variáveis (tempo e volume), o que revela a concepção de álgebra como estudo de relações entre grandezas (USISKIN, 1995). É importante ressaltar que na última linha da tabela, o valor da variável independente é representado pela letra "n", e na coluna correspondente é apresentada a expressão algébrica que permite calcular o volume em função do tempo, porém esses dados não são explorados.

Assim como na outra obra analisada, o conceito de variável não é explorado, assim como a essência do conceito de função, que está subjacente na situação dada, para introduzir o conceito de polinômio. Novamente, percebe-se a preocupação com a "contextualização" dos conceitos matemáticos, tomando situações em outras áreas do conhecimento, entretanto de um modo que não os evidencia, pois se fica atrelado aos aspectos externos dos conceitos.

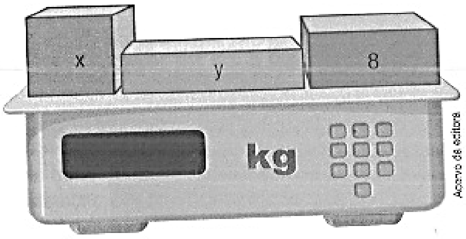
Na sequência, os autores introduzem um novo tópico: "expressões algébricas", sem qualquer ligação com o texto inicial.

3.2.2 Análise do conteúdo "Expressões algébricas"

Figura 31 – Expressões algébricas

Expressões algébricas

As massas, em quilogramas, de duas caixas sobre a balança estão representadas por letras.



Podemos representar quantos quilogramas foram colocados sobre essa balança escrevendo a seguinte **expressão algébrica**.

$$\underbrace{x}_{\text{massa da caixa azul}} + \underbrace{y}_{\text{massa da caixa verde}} + \underbrace{8}_{\text{massa da caixa vermelha}}$$

Se a caixa azul tem 5,5 kg e a verde, 7 kg, podemos calcular quantos quilogramas foram colocados sobre a balança substituindo, na expressão algébrica, as letras x e y por 5,5 e 7, respectivamente, ou seja:

$$x + y + 8 \rightarrow 5{,}5 + 7 + 8 = 20{,}5 \rightarrow 20{,}5 \text{ kg}$$

Nesse caso, encontramos o **valor numérico** da expressão algébrica $x + y + 8$ quando $x = 5{,}5$ e $y = 7$.

- *As expressões em que aparecem letras no lugar de números são chamadas* ***expressões algébricas****. Nessas expressões, as letras são chamadas* ***variáveis****.*
  Quando substituímos a variável de uma expressão algébrica por um número e efetuamos os cálculos, obtemos o ***valor numérico*** *da expressão.*
  Por exemplo, o valor numérico da expressão $2x + y^2 - 5$, para $x = 8$ e $y = -2$, é dado por:

$$2x + y^2 - 5 \rightarrow 2 \cdot 8 + (-2)^2 - 5 = 16 + 4 - 5 = 15$$

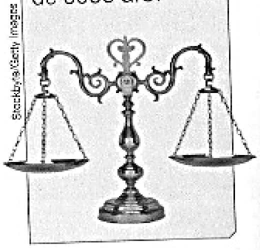
A parte da Matemática que estuda o emprego de letras para representar números é chamada **Álgebra**, nome relacionado ao termo *al-jabr*, do livro *Al-Jabr wa'l muqabalah*, publicado em Bagdá pelo matemático árabe al-Khowarizmi por volta de 825 e que significa restituição, redução, restauração.

As letras no lugar de números eram mais usadas pelos hindus. Porém, foi com os gregos que surgiram os primeiros vestígios de cálculos efetuados com letras, sendo seu precursor o matemático grego Diofanto de Alexandria, que viveu por volta de 250 d.C.

Séculos depois, com o matemático francês François Viète (1540–1603), a Álgebra adquiriu uma forma própria com a introdução das primeiras notações sistematizadas. A obra de Viète, intitulada *In artem analyticam isagoge*, de 1591, é considerada a mais antiga sobre a álgebra simbólica.

Balanças

As balanças tiveram origem na antiga civilização egípcia, por volta de 5000 a.C.



- *A expressão $2x + y^2 - 5$ tem duas variáveis, isto é, x e y. No entanto, podemos ter expressões algébricas com uma, duas, três ou mais variáveis.*
- *Em geral, no produto de dois fatores em que pelo menos um deles é uma letra, não utilizamos o símbolo · ou ×. O produto $5 \cdot x$, por exemplo, geralmente é indicado por $5x$.*

Matemático francês François Viète.

96

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 96

Este conteúdo foi introduzido por meio da análise de uma balança digital, conforme prevê a concepção de álgebra Letrista Facilitadora (LINS; GIMENEZ, 2001). Os itens sobre a balança são sólidos geométricos todos no formato de prisma, que tiveram suas massas representadas em linguagem algébrica, por letras e números.

Após atribuir valores às massas dos objetos, os autores nomeiam o resultado como valor numérico. Tanto os objetos utilizados, quanto a abordagem se tornam pouco significativos no que se refere aos conceitos envolvidos, ou ao menos podem não favorecer a sua compreensão. Encontrar a massa de caixas? Em qual contexto? As variáveis identificam os nomes ou a massa das caixas? Os alunos poderão se perguntar: qual é a necessidade disso? Para que representar as massas por letras? A adequação das notações depende fundamentalmente dos significados envolvidos.

Observamos que o visor da balança não registrou a massa dos objetos, o que torna a balança desnecessária no contexto. O “valor numérico” da expressão algébrica é explicado do ponto de vista dos procedimentos, e as expressões algébricas como expressões onde letras aparecem no lugar de números. Então cabe a pergunta: numa expressão algébrica não há números?

Em seguida é apresentado um texto que faz um apanhado do surgimento da álgebra e a contribuição das diferentes culturas, destacando o surgimento da álgebra simbólica e definindo a Álgebra como a parte da Matemática que estuda o emprego de letras para representar números, o que podemos afirmar, a partir dos estudos feitos, que é uma visão restrita e que acompanha os estudantes em sua vida escolar.

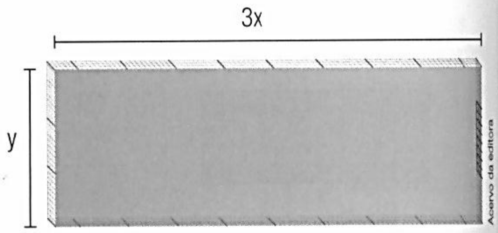
Há uma nota explicativa sobre algumas convenções próprias da linguagem algébrica e outra com data aproximada do surgimento das balanças. Esse dado além de não estar inserido no movimento lógico-histórico, que prevê a necessidade humana do objeto, desvia a atenção do foco do conteúdo, que deveria ser de encontrar e compreender a expressão algébrica, e não o cálculo da massa, que é a utilidade da balança.

3.2.3 Análise do conteúdo "monômios"

Figura 32–Monômios

Monômios

A figura ao lado representa a vista superior de um terreno em forma de retângulo.



Podemos representar a área desse terreno por meio de uma expressão algébrica.

$$A = 3x \cdot y$$

$$A = 3xy$$

Esse tipo de expressão algébrica é chamado **monômio**.

- *Os **monômios** são expressões algébricas formadas por um único **termo**. Esse termo, em geral, é constituído de duas partes: um número, chamado **coeficiente**, e uma variável ou um produto de variáveis, chamado **parte literal**.*

Exemplos:

$2x$ — coeficiente: 2; parte literal: x

$-5x^2y$ — coeficiente: -5; parte literal: x^2y

Veja outros exemplos de monômios:

A 9 **B** 0 **C** xy^2z^3 **D** $-7a$ **E** xy **F** $-\frac{1}{3}a$

*No exemplo **A**, o monômio não possui parte literal e o monômio do exemplo **B** é chamado **monômio nulo**.*

Em geral, para representar um monômio, não utilizamos o símbolo $\cdot$ ou $\times$. O monômio $3 \cdot x \cdot y^2$, por exemplo, pode ser indicado por $3xy^2$.

98

Agora, observe os monômios.

$8x^2y$	x^2y	$21x^2y$
$-x^2y$	$\frac{x^2y}{4}$	$-17x^2y$

Note que esses monômios possuem a mesma parte literal (x^2y). Assim, dizemos que esses são **monômios semelhantes**.

Podemos determinar o **grau de um monômio** adicionando os expoentes das variáveis. O monômio $-3a^2b^4c$, por exemplo, tem grau 7, pois $2 + 4 + 1 = 7$.

Veja o cálculo do grau de dois monômios.

- $23x^3y^2 \rightarrow 3 + 2 = 5$

  Monômio de grau 5 ou de 5º grau.

- $-5abc \rightarrow 1 + 1 + 1 = 3$

  Monômio de grau 3 ou de 3º grau.

O grau de um monômio representado por um número não nulo é zero.

- *Monômios que apresentam a mesma parte literal são chamados **monômios semelhantes**.*
- ***O grau de um monômio** de coeficiente não nulo é dado pela soma dos expoentes das variáveis.*

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 98-99

Este autor também propõe o cálculo de área, do qual se espera extrair um monômio como resultado do problema, conforme prevê a concepção de educação algébrica Fundamentalista-analógica (FIORENTINI, MIORIM E MIGUEL, 1993). Novamente, o que se estabeleceu é uma relação entre variáveis: a área do retângulo (A), a sua altura (y) e o seu comprimento (3x). A expressão A = 3xy não é um monômio, como afirmam os autores, pois ela é a equação que expressa a área do retângulo em função da altura e do comprimento, sendo a altura um número dado, e o comprimento, o triplo desse número.

A abordagem realizada trata as letras como variáveis, entretanto não se discute o que é variável, e valorizam-se os aspectos externos do conteúdo na caracterização dos monômios e das partes que o compõem. Lins e Gimenez (2001) consideram que caracterizar a atividade algébrica a partir de uma descrição leva a uma imediata associação aos conteúdos, deixando de lado os possíveis processos cognitivos peculiares à atividade algébrica propriamente dita. Outro risco causado pela caracterização de determinadas notações é o de excluir do arcabouço da álgebra tudo que não se encaixe na descrição apresentada.

Observa-se, assim, a presença do pensamento empírico, que vai do particular para o geral, pois se trabalha com o conceito de monômio (particular) para se chegar ao de polinômio (mais geral). Vigotski orienta o percurso da aprendizagem a partir do conhecimento mais geral em direção ao mais particular.

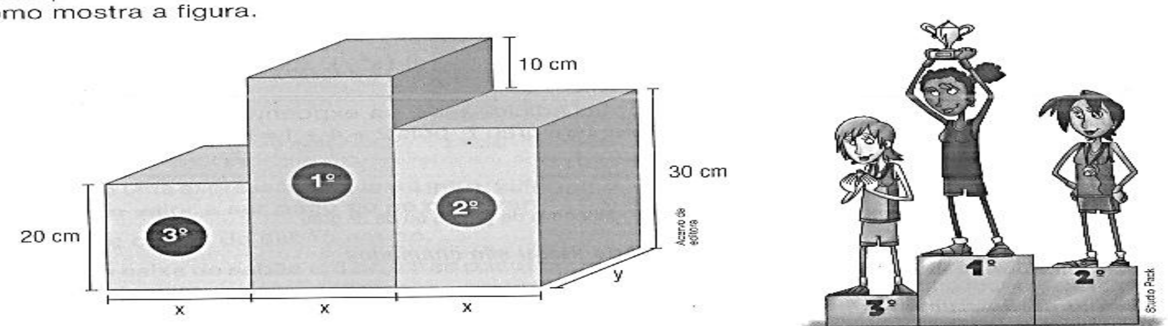
> Sabe-se que na criança os conceitos mais gerais surgem frequentemente antes dos mais particulares. Assim, a criança costuma aprender a palavra “flor” antes da palavra “rosa”. [...] É claro que quando a criança dispõe apenas de um conceito a sua relação com o objeto é diferente de quando ela dispõe de um segundo conceito. Mas também depois disso o conceito “flor” continua durante muito tempo ao lado do conceito “rosa”, e não sobreposto a ele. Não incorpora o conceito mais particular nem o subordina a si mesmo, mas o substitui e o dispõe em uma série consigo mesmo. Quando surge a generalização do conceito “flor”, modifica-se também a relação entre “flor” e “rosa” assim como entre outros conceitos subordinados” (VIGOTSKI, 2010, p. 294).

3.2.4 Análise dos conteúdos "Adição e subtração com monômios", "Multiplicação com monômios", "Divisão com monômios" e "Potenciação com monômios"

Figura 33– Adição e subtração com monômios

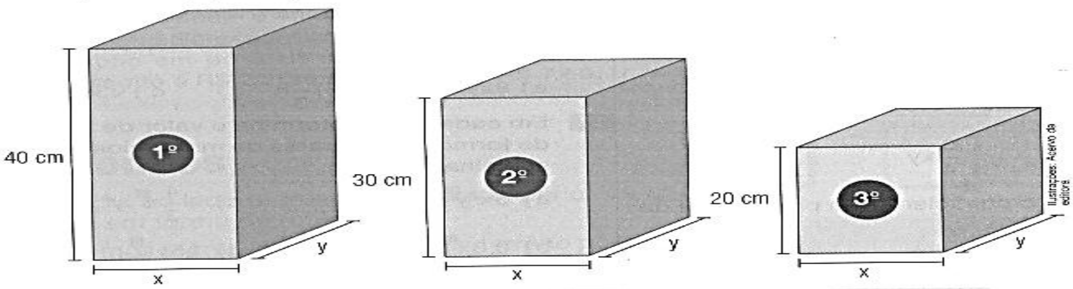
Adição e subtração com monômios

Um pódio foi construído com três paralelepípedos de alturas diferentes, como mostra a figura.



Qual é o volume desse pódio?

Para responder a essa questão, vamos calcular inicialmente o volume de cada paralelepípedo que compõe o pódio.



$V_{1º} = 40xy$ $\quad V_{2º} = 30xy$ $\quad V_{3º} = 20xy$

Agora, adicionamos o volume dos três paralelepípedos.

$$V_{pódio} = V_{1º} + V_{2º} + V_{3º} = 40xy + 30xy + 20xy = (40 + 30 + 20) \cdot xy = 90xy$$

Portanto, o volume do pódio é dado por 90xy.

- *Podemos simplificar uma expressão algébrica em que aparecem monômios semelhantes adicionando ou subtraindo os coeficientes e preservando a parte literal. Exemplos:*
  - $12ab^2 + 3ab^2 - 6ab^2 = (12 + 3 - 6) \cdot ab^2 = 9ab^2$
  - $-6x^3y^4 + 4x^3y^4 - 12x^3y^4 + x^3y^4 = (-6 + 4 - 12 + 1) \cdot x^3y^4 = -13x^3y^4$
  - $xyz^5 - xyz^5 + 0{,}5xyz^5 + 1{,}8xyz^5 = (1 - 1 + 0{,}5 + 1{,}8) \cdot xyz^5 = 2{,}3xyz^5$
  - $\frac{1}{4}abc - \frac{3}{4}abc + \frac{7}{4}abc = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{7}{4}\right) \cdot abc = \frac{5}{4}abc$

Nesse caso, para simplificar a expressão, utilizamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

100

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 100

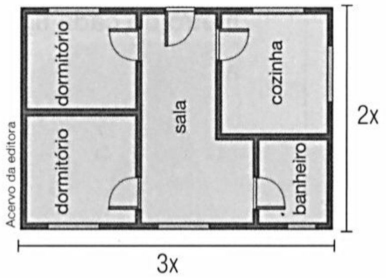
Introduz-se o conteúdo por meio de uma situação-problema, que deixa a desejar no que se refere à necessidade e ao motivo, o que, certamente, comprometerá a atribuição de significados pelo aluno. Novamente é possível identificar a utilização de recursos geométricos a fim de encontrar a expressão algébrica resultante. A resposta final do problema, que é encontrar o volume do pódio é dada em termos de "xy", o que não faz muito sentido, já que como dissemos o problema não deixa claro o motivo de realizar tal cálculo e de fazer tal representação.

Por fim, retoma a ênfase aos procedimentos, dando exemplos de simplificação de monômios semelhantes por meio da adição e subtração de coeficientes. O mesmo tratamento é dado à apresentação dos conteúdos *"Multiplicação com monômios"* (Figura 34).

Figura 34– Multiplicação com monômios

Multiplicação com monômios

A figura abaixo representa a planta baixa de uma casa e tem forma retangular.



Para calcular a área ocupada por essa casa, vamos multiplicar os monômios que representam as medidas do comprimento e da largura da casa.

$$A = 3x \cdot 2x$$
$$A = \underbrace{3 \cdot 2}_{6} \cdot \underbrace{x \cdot x}_{x^{1+1}=x^2}$$
$$A = 6x^2$$

Portanto, a área da casa é $6x^2$.

- *Para determinar o produto de monômios, multiplicamos os coeficientes e, depois, as variáveis da parte literal. Exemplos:*
  - $8a^7 \cdot 3 = 8 \cdot 3 \cdot a^7 = 24a^7$
  - $5ab^2 \cdot 4a^3b = 5 \cdot 4 \cdot a \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot b = 20a^4b^3$
  - $-6x^2 \cdot 3xy \cdot 2y = -6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x \cdot y \cdot y = -36x^3y^2$
  - $1{,}8xy^2 \cdot 0{,}5x^3yz^7 = 1{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot x \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot y \cdot z^7 = 0{,}9x^4y^3z^7$

Para simplificar as expressões, utilizamos a propriedade comutativa da multiplicação e a propriedade da multiplicação de potências de mesma base ($a^n \cdot a^m = a^{n+m}$).

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 102

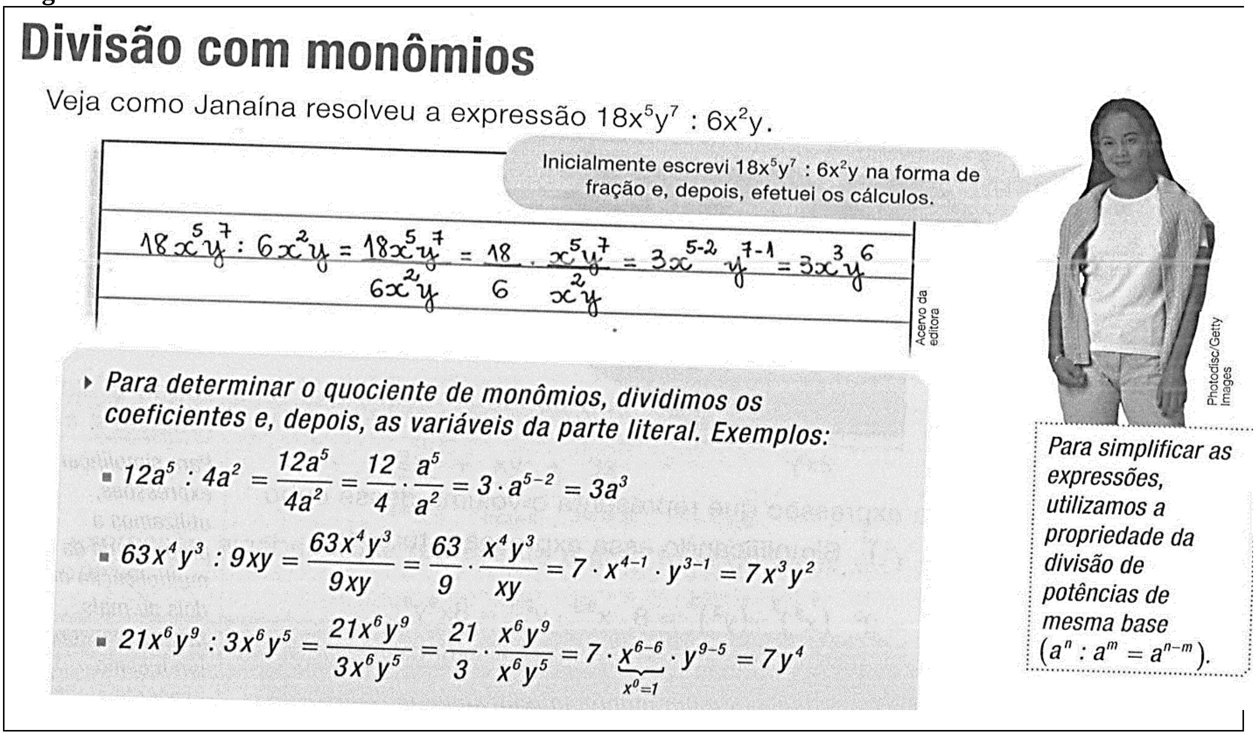
A abordagem utilizada encaixa-se no que preconizam as concepções de álgebra letrista e letrista facilitadora sobre as quais Lins e Gimenez (2001) alertam, como já sabemos pela própria experiência, que não basta que os alunos enunciem as mesmas afirmações que os professores ou especialistas. Ao invés disso é necessário investigar os significados que por eles foram produzidos, e concluem que estas concepções

> [...] ignoram o fato de que produtos notáveis como áreas e como manipulação simbólica guardam em comum apenas o texto da *afirmação*, mas não a *justificação* que torna sua enunciação legítima. Em outras palavras, de área para pensamento algébrico ou balanças para pensamento algébrico há rupturas, e não "abstração" ou "passagem" (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 121).

Essa afirmação dos autores aponta para o movimento dialético da construção do pensamento teórico – não se trata apenas de uma generalização de casos particulares para o geral, mas se faz necessária outra construção, a partir de rupturas com o que está posto.

Finalmente, a abordagem do conteúdo *"Divisão com monômios"* difere-se das demais apenas por não utilizar recursos geométricos para encontrar a expressão algébrica resultante. A abordagem concentra-se no transformismo algébrico.

Figura 35– Divisão com monômios



Divisão com monômios

Veja como Janaína resolveu a expressão $18x^5y^7 : 6x^2y$.

Inicialmente escrevi $18x^5y^7 : 6x^2y$ na forma de fração e, depois, efetuei os cálculos.

$$18x^5y^7 : 6x^2y = \frac{18x^5y^7}{6x^2y} = \frac{18}{6} \cdot \frac{x^5y^7}{x^2y} = 3x^{5-2}y^{7-1} = 3x^3y^6$$

Acervo da editora

Photodisc/Getty Images

- Para determinar o quociente de monômios, dividimos os coeficientes e, depois, as variáveis da parte literal. Exemplos:
  - $12a^5 : 4a^2 = \frac{12a^5}{4a^2} = \frac{12}{4} \cdot \frac{a^5}{a^2} = 3 \cdot a^{5-2} = 3a^3$
  - $63x^4y^3 : 9xy = \frac{63x^4y^3}{9xy} = \frac{63}{9} \cdot \frac{x^4y^3}{xy} = 7 \cdot x^{4-1} \cdot y^{3-1} = 7x^3y^2$
  - $21x^6y^9 : 3x^6y^5 = \frac{21x^6y^9}{3x^6y^5} = \frac{21}{3} \cdot \frac{x^6y^9}{x^6y^5} = 7 \cdot \underbrace{x^{6-6}}_{x^0=1} \cdot y^{9-5} = 7y^4$

Para simplificar as expressões, utilizamos a propriedade da divisão de potências de mesma base ($a^n : a^m = a^{n-m}$).

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 103

3.2.5 Análise dos conteúdos "Polinômios", "Simplificação de polinômios", "Grau de um polinômio", "Adição e subtração com polinômio", "Multiplicação com polinômio" e Divisão de polinômio por monômio.

Quadro 11–Análise do tema: Polinômios, produtos notáveis e fatoração

Conteúdo	**Observações**	**Unidades de análise**
Polinômios e Simplificação de polinômios	a) Introduz o conteúdo por meio de uma situação-problema. b) Utiliza recursos geométricos. c) Valoriza os aspectos externos do conteúdo por meio da caracterização dos polinômios. d) Define polinômios como adição algébrica de monômios. e) Apresenta uma sequência de procedimentos operatórios para simplificar polinômios.	4 5.1.2 5.1.4 5.2.2 5.2.3.2 5.2.4.1
Grau de um polinômio	a) Dá exemplos de como identificar o grau de um polinômio. b) Valoriza os aspectos externos do conteúdo.	4 5.1.4 5.2.2
Adição e subtração com polinômio	a) Utiliza recursos geométricos para introduzir o conteúdo. b) Apresenta uma sequência de procedimentos operatórios para somar e subtrair polinômios c) Valoriza os aspectos externos do conteúdo.	4 5.1.4 5.2.2 5.2.4.1 5.2.3.2
Multiplicação Com polinômio	a) Utiliza recursos geométricos para introduzir o conteúdo. b) Apresenta uma sequência de procedimentos operatórios para multiplicar polinômios. c) Valoriza os aspectos externos do conteúdo.	4 5.1.4 5.2.2 5.2.4.1 5.2.3.2
Divisão de polinômio por monômio	a) Utiliza recursos geométricos para introduzir o conteúdo. b) Dá exemplos de como realizar a divisão de um polinômio por um monômio. c) Valoriza os aspectos externos do conteúdo.	4 5.1.4 5.2.2 5.2.4.1 5.2.3.2

Agrupamos esses conteúdos para que a análise não se torne demasiadamente repetitiva, tendo em vista que todas elas apresentam abordagens bastante semelhantes, todas são iniciadas por meio de recursos geométricos, e os resultados dos cálculos são apresentados em função das variáveis envolvidas, exceto para a abordagem do conteúdo “grau de um polinômio”. Assim, valorizam-se os aspectos externos do conteúdo por meio da sua caracterização, apresenta-se uma sequência de procedimentos operatórios com polinômios e por fim, mostram-se outros exemplos de como operar, que recaem no transformismo algébrico.

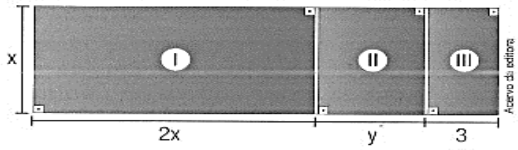
No tópico *"polinômios"* (Figura 40), esse conceito que é mais geral, é definido como adição algébrica de monômios. Como já dissemos no item 3.1.4, o essencial do conceito de um polinômio está ligado ao conceito de função. Sem expressar essa essência, a aprendizagem dos nexos internos não se completa e o conceito de polinômio fica restrito a uma expressão algébrica.

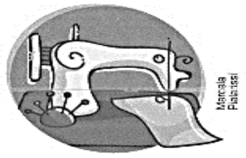
Por outro lado, o processo de produção de significados para os polinômios e suas operações por meio de recursos geométricos estabelece limites internos ou limites epistemológicos (LINS; GIMENEZ, 2001).

Figura 36 – Polinômios

Polinômios

Para montar uma confecção, Renato dividiu um salão em três partes como mostra a figura.





Veja a seguir uma expressão algébrica que representa a área do salão após a divisão:

$$\underbrace{2x^2}_{\text{área da parte I}} + \underbrace{xy}_{\text{área da parte II}} + \underbrace{3x}_{\text{área da parte III}}$$

A expressão algébrica que representa a área total do salão é chamada **polinômio**.

Confecção ▪ fábrica de porte pequeno ou médio que produz roupas de vestuário, cama, mesa ou banho.

- *Os **polinômios** são expressões algébricas formadas pela adição algébrica de monômios, sendo cada monômio um **termo** do polinômio.*
  *Dependendo do número de termos, um polinômio recebe um nome particular. Os polinômios que possuem um termo são chamados **monômios**, os que possuem dois termos, **binômios**, e os que possuem três termos, **trinômios**.*
  As expressões algébricas que possuem mais de três termos não recebem nomes particulares.
  Veja alguns exemplos de polinômios.

A $\frac{xy^3}{2}$ *(monômio)*

B $x + 15$ *(binômio)*

C $a^2 - b^2$ *(binômio)*

D $9x^8 + 7x - 1$ *(trinômio)*

E $x^2y - y^2 + 3x$ *(trinômio)*

F $a + b - c - 4$ *(polinômio)*

*Um polinômio formado por monômios nulos é chamado **polinômio nulo**.*

Simplificação de polinômios

Em alguns casos, é possível **simplificar** um polinômio que apresenta monômios semelhantes em sua escrita.

Vamos simplificar o polinômio $5x^2y^3 - 4x^2 + 3x \cdot (x - 2) - 2x^2y^3 + 3 + x^2$.

- Aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação para eliminar os parênteses.

$$5x^2y^3 - 4x^2 + 3x^2 - 6x - 2x^2y^3 + 3 + x^2$$

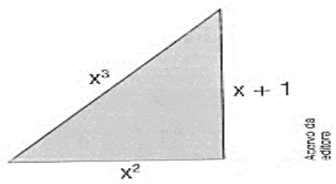
- Organizamos os monômios semelhantes lado a lado e efetuamos as adições e subtrações.

$$5x^2y^3 - 2x^2y^3 - 4x^2 + 3x^2 + x^2 - 6x + 3 =$$
$$= (5 - 2) \cdot x^2y^3 + (-4 + 3 + 1) \cdot x^2 - 6x + 3 = 3x^2y^3 + 0x^2 - 6x + 3 =$$
$$= 3x^2y^3 - 6x + 3$$

O polinômio $3x^2y^3 - 6x + 3$ é chamado **polinômio reduzido**.

Agora, veja o polinômio que representa o perímetro do triângulo abaixo.

$$x^3 + x^2 + x + 1$$



Nesse polinômio, a única variável é x. Dizemos que esse é um **polinômio com uma única variável**. Veja outros exemplos de polinômios com essa característica.

- $2y^3 - y^2 + 15y$
  variável **y**
- $7a^6 - 3a^4 + a^2 + 5a + 34$
  variável **a**

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 105-106

Figura 37–Adição e subtração com polinômio

Adição e subtração com polinômios

Adição com polinômios

Observe as figuras.

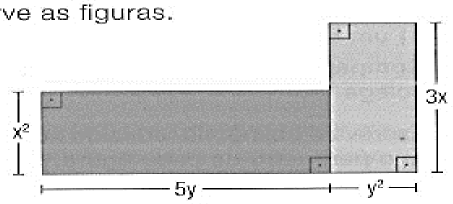


figura 1

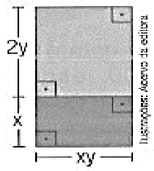


figura 2

Para representar a área das duas figuras juntas, adicionamos os polinômios que representam a área dessas figuras.

$$\underbrace{(5x^2y + 3xy^2)}_{\text{área da figura 1}} + \underbrace{(x^2y + 2xy^2)}_{\text{área da figura 2}}$$

Agora, eliminamos os parênteses, organizamos os termos semelhantes lado a lado e efetuamos as adições.

$$5x^2y + 3xy^2 + x^2y + 2xy^2 = 5x^2y + x^2y + 3xy^2 + 2xy^2 =$$
$$= (5 + 1) \cdot x^2y + (3 + 2) \cdot xy^2 = 6x^2y + 5xy^2$$

Assim, o polinômio que representa a área das duas figuras juntas é dado por $6x^2y + 5xy^2$.

Polinômio oposto

Quando adicionamos um polinômio a outro e obtemos um polinômio nulo como resultado, dizemos que esses polinômios são **opostos**. De maneira prática, para obtermos o oposto de um polinômio dado, trocamos o sinal de cada um de seus termos. Veja, por exemplo, o oposto de $5x^2 - 4x + 8$.

$$-(5x^2 - 4x + 8) = \underbrace{-5x^2 + 4x - 8}_{\text{oposto de } 5x^2-4x+8}$$

Em um polinômio com uma única variável, os termos geralmente são escritos do termo de maior grau para o de menor grau.

Observe que ao adicionarmos $5x^2 - 4x + 8$ ao seu oposto, obtemos um polinômio nulo.

$$(5x^2 - 4x + 8) + (-5x^2 + 4x - 8) = 5x^2 - 4x + 8 - 5x^2 + 4x - 8 =$$
$$= (5 - 5) \cdot x^2 + (-4 + 4) \cdot x + 8 - 8 = 0x^2 + 0x + 0 = 0$$

Subtração com polinômios

Outra operação que podemos realizar com os polinômios é a subtração.

Para calcular a subtração $(7y^2 - 12y + 15) - (4y^2 + 16y - 18)$, por exemplo, adicionamos o 1º polinômio ao oposto do 2º.

$$(7y^2 - 12y + 15) + \underbrace{(-4y^2 - 16y + 18)}_{\text{oposto de } 4y^2+16y-18} = 7y^2 - 12y + 15 - 4y^2 - 16y + 18 =$$
$$= 7y^2 - 4y^2 - 12y - 16y + 15 + 18 = (7 - 4) \cdot y^2 + (-12 - 16) \cdot y + 15 + 18 =$$
$$= 3y^2 - 28y + 33$$

108

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 108

3.2.6 Análise do conteúdo "Produtos notáveis" e "Quadrado da soma de dois termos"

Quadro 12 – Análise do tema: Produtos notáveis e fatoração

Conteúdo	**Observações**	**Unidades de análise**
Produtos notáveis / Quadrado da soma de dois termos	a) Definiu produtos notáveis como casos de regularidades encontradas nos produtos de polinômios. b) Fez breve abordagem histórica do conteúdo. c) Utilizou recursos geométricos para justificar as passagens do transformismo algébrico. d) Apresenta exemplos de utilização do tipo técnica/prática.	2 3 4 5.1.4 5.2.2 5.2.3.2 5.2.4.1 5.3.1
Quadrado da diferença de dois termos	a) Utilizou recursos geométricos para justificar as passagens do transformismo algébrico. b) Realiza um abordagem lógico-simbólica. c) Apresenta exemplos de utilização do tipo técnica/prática.	4 5.1.4 5.2.2 5.2.3.2 5.2.4.1 5.3.1
Produto da soma pela diferença de dois termos	a) Utilizou recursos geométricos para justificar as passagens do transformismo algébrico. b) Realiza uma abordagem lógico-simbólica. c) Apresenta exemplos de utilização do tipo técnica/prática.	4 5.1.4 5.2.2 5.2.3.2 5.2.4.1 5.3.1
Fatoração colocando um fator comum em evidência	a) Propõe o raciocínio algébrico análogo com o aritmético: aritmética generalizada. b) Utiliza recursos geométricos para justificar as passagens do transformismo algébrico. c) Realiza uma abordagem lógico-simbólica.	4 5.1.1 5.1.4 5.2.2 5.2.3.2 5.2.4.1
Fatoração por agrupamento / diferença de dois quadrados / trinômio quadrado perfeito	a) Introduz o conteúdo por meio de exemplo de como aplicar a técnica de fatoração. b) Valoriza os procedimentos operatórios. c) Abordagem lógico-simbólica. d) Aplica as propriedades das operações para conferir a aplicação correta do procedimento.	4 5.1.4 5.2.4.1

O conteúdo foi introduzido com um texto que traz breve abordagem histórica e define produtos notáveis como casos de regularidades encontradas nos produtos de polinômios. Os autores afirmam que, desde a Antiguidade, os processos referentes aos produtos notáveis eram ilustrados por figuras.

Figura 38–Produtos notáveis

Produtos notáveis

Alguns produtos de polinômios aparecem com frequência em problemas e apresentam certas regularidades. Esses produtos são chamados **produtos notáveis**, e o conhecimento dessas regularidades facilita a realização de cálculos.

Na Antiguidade os gregos utilizavam processos algébricos e geométricos que recaíam no que chamamos atualmente de **produtos notáveis**. Muitos deles são atribuídos aos pitagóricos e constam na obra *Elementos* de Euclides. Esses processos, de maneira geral, eram ilustrados por figuras.

Autor desconhecido - Euclides, 1806. Coleção particular. Foto: Science Archive/Other Images

Obra retratando Euclides de Alexandria e alguns estudantes.

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 113

3.2.7 Análise dos conteúdos: "Quadrado da soma de dois termos", "Quadrado da diferença de dois termos" e "Produto da soma pela diferença de dois termos"

Figura 39– Quadrado da soma de dois termos

Quadrado da soma de dois termos

O **quadrado da soma de dois termos** é um produto notável que pode ser indicado por:

$$\underset{1^{\underline{o}}\ \text{termo}}{(a}+\underset{2^{\underline{o}}\ \text{termo}}{b)}^2 \text{ ou } (a+b)\cdot(a+b)$$

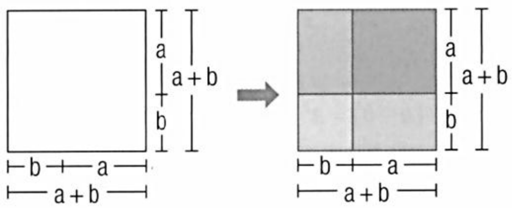
Podemos desenvolver esse produto notável utilizando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + \underbrace{ab}_{ba} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

A expressão $a^2 + 2ab + b^2$ tem três termos e é chamada **trinômio quadrado perfeito**. Veja como podemos justificar geometricamente a igualdade acima, para **a** e **b** positivos.

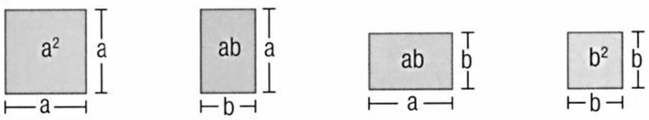
A palavra notável, nesse caso, é o mesmo que merecer a atenção, destaque etc.

- *Consideramos um quadrado cuja medida do lado é $a+b$, ou seja, com área $A=(a+b)^2$ (I) ou $A=(a+b)\cdot(a+b)$ (II). Em seguida, decompomos esse quadrado em quatro partes.*



Lembre-se de que a área de um quadrado é dada pelo quadrado da medida de seu lado.

- *As áreas das partes obtidas são dadas por:*



Podemos obter a área do quadrado inicial adicionando as áreas de cada parte obtida.

$$A = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (III)$$

Portanto, como as expressões I, II e III representam a mesma área, justificamos geometricamente a igualdade $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$.

Ilustrações: Acervo da editora

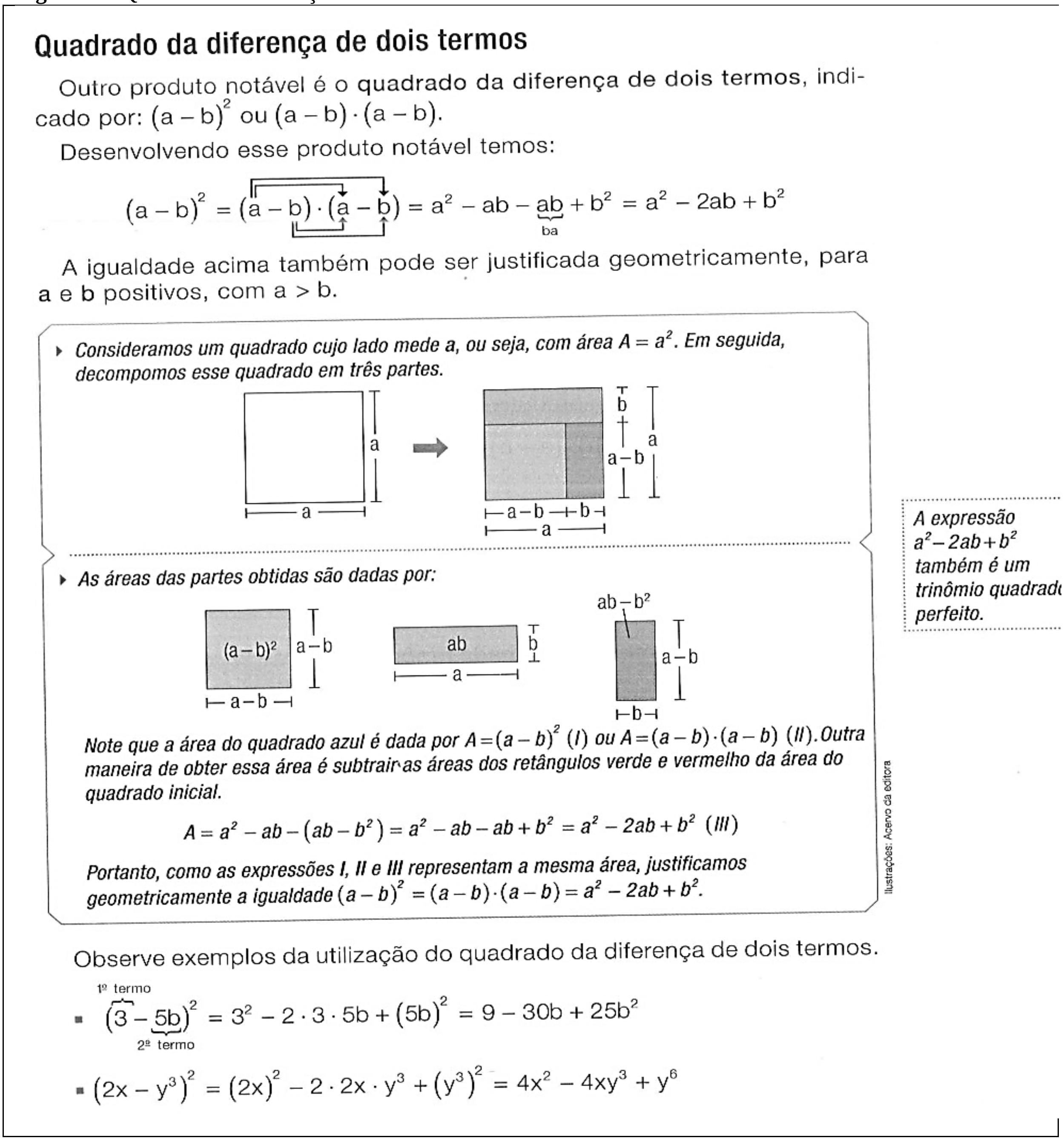
Observe exemplos da utilização do quadrado da soma de dois termos.

- $(\overbrace{2x}^{1^{\underline{o}}\ \text{termo}} + \underbrace{3y}_{2^{\underline{o}}\ \text{termo}})^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$
- $(c^2+9)^2 = (c^2)^2 + 2\cdot c^2\cdot 9 + 9^2 = c^4 + 18c^2 + 81$

113

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 113

Figura 40–Quadrado da diferença de dois termos



Quadrado da diferença de dois termos

Outro produto notável é o **quadrado da diferença de dois termos**, indicado por: $(a-b)^2$ ou $(a-b)\cdot(a-b)$.

Desenvolvendo esse produto notável temos:

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - \underbrace{ab}_{ba} + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

A igualdade acima também pode ser justificada geometricamente, para **a** e **b** positivos, com $a > b$.

- *Consideramos um quadrado cujo lado mede a, ou seja, com área $A = a^2$. Em seguida, decompomos esse quadrado em três partes.*

- *As áreas das partes obtidas são dadas por:*

Note que a área do quadrado azul é dada por $A=(a-b)^2$ (I) ou $A=(a-b)\cdot(a-b)$ (II). Outra maneira de obter essa área é subtrair as áreas dos retângulos verde e vermelho da área do quadrado inicial.

$$A = a^2 - ab - (ab - b^2) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (III)$$

*Portanto, como as expressões **I**, **II** e **III** representam a mesma área, justificamos geometricamente a igualdade $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$.*

Ilustrações: Acervo da editora

A expressão $a^2 - 2ab + b^2$ também é um trinômio quadrado perfeito.

Observe exemplos da utilização do quadrado da diferença de dois termos.

- $(\overbrace{3}^{1^{\underline{o}}\text{ termo}} - \underbrace{5b}_{2^{\underline{o}}\text{ termo}})^2 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot 5b + (5b)^2 = 9 - 30b + 25b^2$
- $(2x - y^3)^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot y^3 + (y^3)^2 = 4x^2 - 4xy^3 + y^6$

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 114

Figura 41–Produto da soma pela diferença de dois termos

Produto da soma pela diferença de dois termos

O **produto da soma pela diferença de dois termos** também é um produto notável, e é indicado por: $(a + b) \cdot (a - b)$.

Desenvolvendo esse produto notável temos:

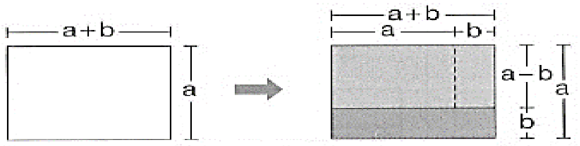
$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \underbrace{\cancel{ab}}_{ba} - b^2 = a^2 - b^2$$

A expressão $a^2 - b^2$ é chama ***diferença de quadrados.***

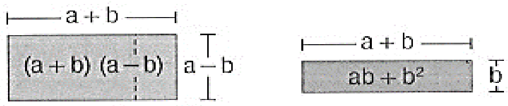
A igualdade acima também pode ser justificada geometricamente, para **a** e **b** positivos, com a > b.

114

- *Consideramos um retângulo cujas medidas dos lados são $a + b$ e a, ou seja, com área $A = a^2 + ab$. Em seguida, decompomos esse retângulo em outros dois retângulos.*



- *As áreas dos retângulos obtidos são dadas por:*



Note que a área do retângulo azul é dada por $A = (a + b) \cdot (a - b)$ (I). Outra maneira de obter essa área é subtrair a área do retângulo vermelho da área do retângulo inicial.

$$A = a^2 + ab - (ab + b^2) = a^2 \cancel{+ab} \cancel{-ab} - b^2 = a^2 - b^2 \quad (II)$$

*Portanto, como as expressões **I** e **II** representam a mesma área, justificamos geometricamente a igualdade $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.*

Ilustrações: Acervo da editora

Observe exemplos da utilização do produto da soma pela diferença de dois termos.

- $(\overbrace{2x}^{1^{\text{o}}\ \text{termo}} + \underbrace{3y}_{2^{\text{o}}\ \text{termo}}) \cdot (2x - 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$
- $(5 + 4a^2) \cdot (5 - 4a^2) = 5^2 - (4a^2)^2 = 25 - 16a^4$

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 114-115

Novamente agrupamos três conteúdos devido à semelhança da abordagem, conforme Figuras 46, 47 e 48. Os autores utilizam recursos geométricos para justificar as passagens do transformismo algébrico e, por fim, apresentam exemplos de utilização do tipo técnica/prática. Essa abordagem é bastante semelhante à que é realizada na outra obra analisada nesta dissertação e vale repetir que a associação dos produtos notáveis – “*quadrado da diferença”* e “*produto da soma pela diferença”* ao cálculo de áreas, não é tão evidente como para o “*quadrado da soma”*, o que pode mais dificultar do que auxiliar na criação de uma significação para o procedimento. Além disso, não se cria uma necessidade e não se explora a essência do procedimento, que está ancorada na regularidade que pode ser observada.

Ao finalizar aqui a apresentação dos produtos notáveis, e antes de iniciar a análise dos casos de fatoração, o que corresponde à sequência adotada pelo livro, trazemos um apontamento de Lins e Gimenez (p. 119), que foi baseado nos estudos de Davidov. Eles apresentam a seguinte problemática:

> “Joãozinho tinha 5 bolas de gude e ganhou mais algumas, ficando com 12 bolas de gude. Quantas bolas Joãozinho ganhou?” são tidos como mais difíceis do que “Joãozinho tinha 5 bolas de gude e ganhou outras 7. Com quantas ele ficou? Nas linhas de educação matemática habitual, esses problemas seriam com certeza ensinados em separado, cada um com sua própria maneira de resolver, e, com toda a certeza, o primeiro problema seria ensinado por último. [...] A abordagem de Davidov nos coloca em situação bastante distinta. Uma vez explicitada a *afirmação* “5 + B = 12”, para a qual se produziu significado em relação a um núcleo de todo-partes, põe-se imediatamente em jogo duas outras *afirmações* “12 – B = 5” e 12 – 7 = B”. Já mostramos de que forma a existência desse núcleo comum é fundamental aqui. A solução do primeiro problema não é imediata, mas a passagem da *afirmação* que o constitui para a *afirmação* que o resolve não deveria apresentar problemas: o que guia a escolha, o que caracteriza o processo de antecipação (como diz Boero), é o fato de que procuramos uma *afirmação* legítima e que nos indique um cálculo a ser feito.

De maneira análoga, durante a apresentação dos produtos notáveis, abre-se a possibilidade de trabalhar os casos de fatoração levando-se em consideração a relação todo-partes e as propriedades que garantem a comutatividade, a simetria e a transitividade, pois a fatoração envolve uma ação inversa em relação à obtenção do produto. Multiplicação e fatoração não são assuntos diversos, se considerarmos a estrutura geral envolvida – se A.B = C, então C = A.B, isto é, dados os fatores, podemos obter o produto, e, dado o produto, podemos obter os fatores. Entram, em seguida, os procedimentos para isso, que podem, inclusive, se constituírem em um desafio para os alunos.

3.2.8 Análise dos conteúdos "Fatoração de polinômios" e "Fatoração colocando um fator comum em evidência"

Figura 42–Fatoração de polinômios

Fatoração de polinômios

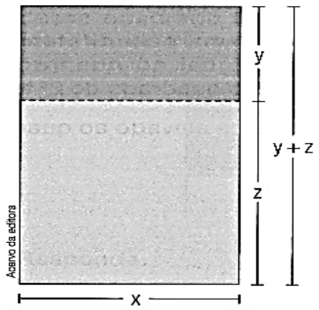
Estudamos em anos anteriores que podemos escrever um número como o produto de dois ou mais números, ou seja, escrevê-lo de **forma fatorada**.

Observe alguns exemplos de como podemos fatorar o número 36.

- $36 = 4 \cdot 9$
- $36 = 2 \cdot 3 \cdot 6$
- $36 = 3 \cdot 12$
- $36 = 2 \cdot 2 \cdot 9$
- $36 = 6 \cdot 6$
- $36 = 3 \cdot 3 \cdot 4$
- $36 = 2 \cdot 18$
- $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

Além de números, também podemos **fatorar** polinômios, isto é, escrevê-los como o produto de dois ou mais polinômios.

Considere o retângulo a seguir decomposto em duas partes. Podemos representar a área desse retângulo de duas maneiras.



- Desconsiderando a decomposição:

$$x \cdot (y + z)$$

- Adicionando as áreas das duas partes obtidas:

$$xy + xz$$

O polinômio $x \cdot (y + z)$ é uma forma fatorada de $xy + xz$.

Estudaremos a seguir alguns métodos de fatoração de polinômio.

Fatoração colocando um fator comum em evidência

Observe como podemos fatorar o polinômio $6ab + 10bc$.

- *Inicialmente decompomos cada termo.*

$$6ab + 10bc = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b + 2 \cdot 5 \cdot b \cdot c$$

Note que os fatores 2 e b são comuns aos dois termos do polinômio.

- *Dessa maneira, em cada termo, escrevemos esses fatores multiplicando os demais.*

$$2 \cdot 3 \cdot a \cdot b + 2 \cdot 5 \cdot b \cdot c = 2b \cdot (3a + 5c)$$

Portanto, dizemos que $2b$ é o fator comum aos termos de $6ab + 10bc$, dos quais uma das formas fatoradas é $2b \cdot (3a + 5c)$.

No polinômio $2b \cdot (3a + 5c)$, o fator comum em evidência é $2b$.

Veja outros exemplos:

- $5x^3y^4z - 15xy^3 = 5xy^3 \cdot (x^2yz - 3)$
- $3y^5 + 6y^3 + 12y^6 = 3y^3 \cdot (y^2 + 2 + 4y^3)$
- $6xy^2z^2 + 2x^2y^4z^2 - 16x^3y^5z^9 + 2xy^3z = 2xy^2z \cdot (3z + xy^2z - 8x^2y^3z^8 + y)$

118

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 118

O conteúdo é introduzido recordando como escrever um número de forma fatorada, por meio do produto de outros números. Baseando-se nessa exposição, que se coaduna com a concepção de álgebra como aritmética generalizada, é proposto o raciocínio algébrico análogo com o aritmético.

É realizada uma abordagem lógico-simbólica, na qual se utilizam recursos geométricos para justificar as passagens do transformismo algébrico, que ilustra, mas que não garante a significação.

3.2.9 Análise dos conteúdos "Fatoração por agrupamento", "diferença de dois quadrados" e "trinômio quadrado perfeito"

Os três tópicos em epígrafe são introduzidos por meio de exemplo de como aplicar a técnica de fatoração, como se pode observar na Figura 48. Esse tipo de abordagem, centrada na lógica das operações e nos símbolos enfatiza os procedimentos operatórios, sem enfocar a relação geral, discutida anteriormente, a não ser em alguns, de modo periférico, e não como a ideia central e essencial do conceito. Como forma de conferir a aplicação correta dos procedimentos, sugere-se a aplicação das propriedades das operações.

Lins e Gimenez (2001) comentam que após algumas leituras, compararam este tipo de abordagem com outras de origem britânica, nas quais a preocupação maior não é com uma delimitação precisa do que é tratado em cada atividade, e sim, com o envolvimento dos alunos, ativamente, na organização de dados e no estabelecimento de relações, e na procura, quando necessário, de maiores recursos técnicos, porém diante do processo de ensino-aprendizagem, torna-se necessário não separar aspectos como a notação e os conceitos, enfatizando, por exemplo, que são problemas que permitem que se produza significado para aqueles, e vice-versa.

Figura 43– Fatoração por agrupamento, diferença de dois quadrados, trinômio quadrado perfeito

Fatoração por agrupamento

Há polinômios que não têm fatores comuns a todos os termos. Em alguns desses casos é possível utilizar o método de **fatoração por agrupamento**.

Observe como podemos fatorar $ax - az + 5x - 5z$ por agrupamento.

- *Inicialmente agrupamos os termos que possuem fator comum e colocamos esse fator em evidência em cada grupo obtido.*

$$ax - az + 5x - 5z = (ax - az) + (5x - 5z) = a \cdot (x - z) + 5 \cdot (x - z)$$

Note que $(x - z)$ é um fator comum a todos os termos obtidos.

- *Assim, colocamos $(x - z)$ em evidência.*

$$a \cdot (x - z) + 5 \cdot (x - z) = (x - z) \cdot (a + 5)$$

Portanto, $(x - z) \cdot (a + 5)$ é uma forma fatorada do polinômio $ax - az + 5x - 5z$.

Veja mais alguns exemplos.

- $7b + 7 + ab^3 + ab^2 = 7 \cdot (b + 1) + ab^2 \cdot (b + 1) = (b + 1) \cdot (7 + ab^2)$
- $3a^3 + 3ab - 4a^2b - 4b^2 = 3a \cdot (a^2 + b) - 4b \cdot (a^2 + b) = (a^2 + b) \cdot (3a - 4b)$

Para verificar se uma fatoração foi realizada de maneira correta, utilizamos a propriedade distributiva da multiplicação. O resultado obtido deve ser igual ao polinômio que foi fatorado.

$$(a + 5) \cdot (x - z) = ax - az + 5x - 5z$$

Fatoração da diferença de dois quadrados

No estudo de produtos notáveis, vimos que o produto da soma pela diferença de dois termos é uma diferença de quadrados, ou seja, $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

O produto $(a + b) \cdot (a - b)$ é a forma fatorada de $a^2 - b^2$.

Observe alguns exemplos.

- $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x + 7) \cdot (x - 7)$
- $\frac{1}{4}a^2 - b^2c^4 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - (bc^2)^2 = \left(\frac{1}{2}a + bc^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a - bc^2\right)$

Fatoração do trinômio quadrado perfeito

Vimos que o quadrado da soma ou da diferença de dois termos é um trinômio quadrado perfeito, ou seja:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Dizemos que $(a + b)^2$ é a forma fatorada de $a^2 + 2ab + b^2$ e $(a - b)^2$ é a forma fatorada de $a^2 - 2ab + b^2$.

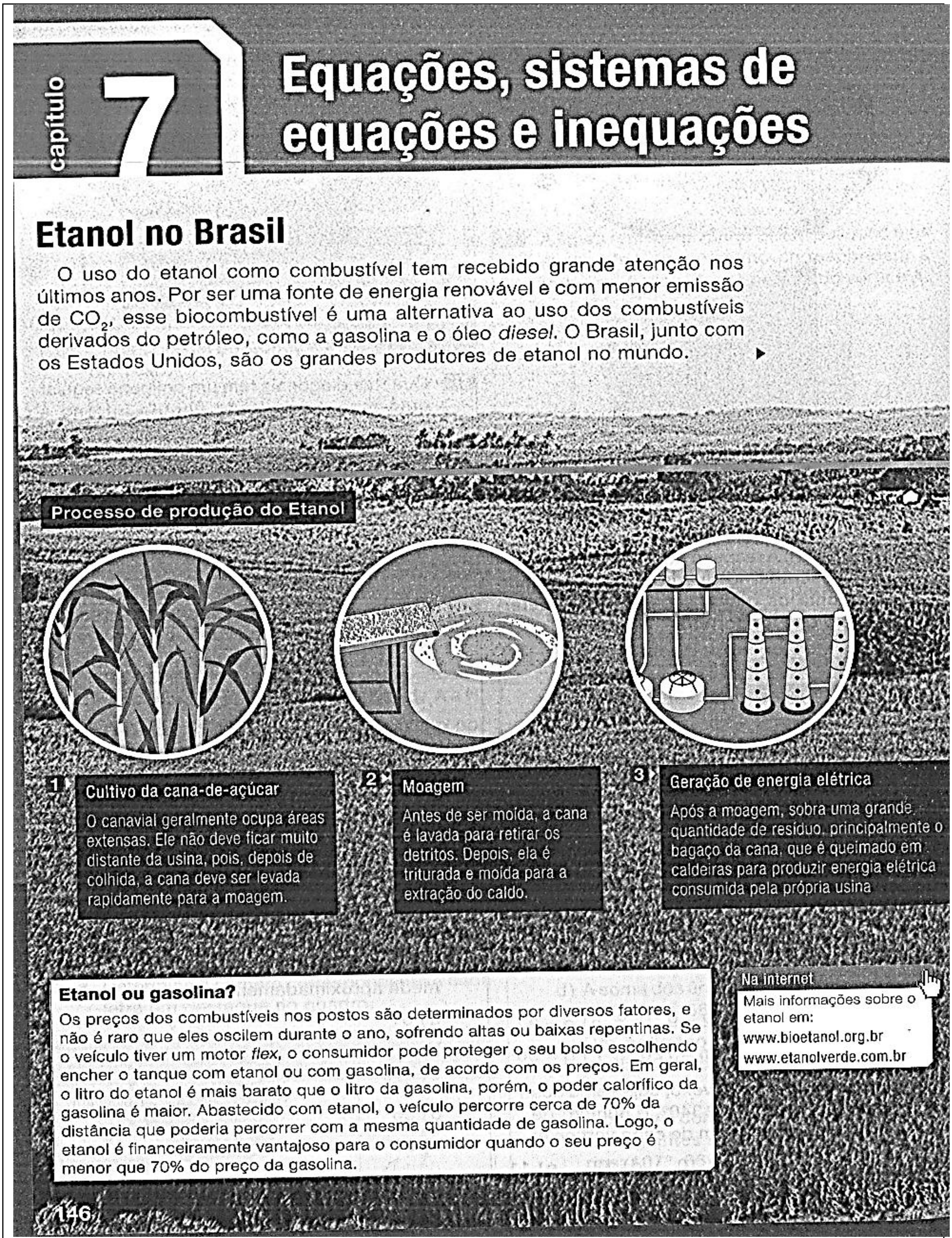
Observe alguns exemplos de fatoração de trinômios quadrados perfeitos.

- $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot (x \cdot 3) + 3^2 = (x + 3)^2$
- $9a^2 + 12a + 4 = (3a)^2 + 2 \cdot (3a \cdot 2) + 2^2 = (3a + 2)^2$
- $y^2 - 12y + 36 = y^2 - 2 \cdot (y \cdot 6) + 6^2 = (y - 6)^2$
- $4x^2 - 20xy + 25y^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x \cdot 5y) + (5y)^2 = (2x - 5y)^2$

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 119

3.2.10 Análise do conteúdo “Equações, sistemas de equações e inequações”

Figura 44-Equações, sistemas de equações e inequações I



capítulo 7

Equações, sistemas de equações e inequações

Etanol no Brasil

O uso do etanol como combustível tem recebido grande atenção nos últimos anos. Por ser uma fonte de energia renovável e com menor emissão de CO_2, esse biocombustível é uma alternativa ao uso dos combustíveis derivados do petróleo, como a gasolina e o óleo *diesel*. O Brasil, junto com os Estados Unidos, são os grandes produtores de etanol no mundo.

Processo de produção do Etanol

1 Cultivo da cana-de-açúcar

O canavial geralmente ocupa áreas extensas. Ele não deve ficar muito distante da usina, pois, depois de colhida, a cana deve ser levada rapidamente para a moagem.

2 Moagem

Antes de ser moída, a cana é lavada para retirar os detritos. Depois, ela é triturada e moída para a extração do caldo.

3 Geração de energia elétrica

Após a moagem, sobra uma grande quantidade de resíduo, principalmente o bagaço da cana, que é queimado em caldeiras para produzir energia elétrica consumida pela própria usina.

Etanol ou gasolina?

Os preços dos combustíveis nos postos são determinados por diversos fatores, e não é raro que eles oscilem durante o ano, sofrendo altas ou baixas repentinas. Se o veículo tiver um motor *flex*, o consumidor pode proteger o seu bolso escolhendo encher o tanque com etanol ou com gasolina, de acordo com os preços. Em geral, o litro do etanol é mais barato que o litro da gasolina, porém, o poder calorífico da gasolina é maior. Abastecido com etanol, o veículo percorre cerca de 70% da distância que poderia percorrer com a mesma quantidade de gasolina. Logo, o etanol é financeiramente vantajoso para o consumidor quando o seu preço é menor que 70% do preço da gasolina.

Na internet

Mais informações sobre o etanol em:
www.bioetanol.org.br
www.etanolverde.com.br

146

► Porém, enquanto o Brasil obtém o etanol a partir da cana-de-açúcar, nos Estados Unidos a principal matéria-prima é o milho. Um dos benefícios do uso desse combustível é em relação à questão ambiental, pois a emissão de gases do efeito estufa é reduzida. No caso do etanol obtido da cana--de-açúcar, a redução é de 90% em relação aos combustíveis fósseis. Já o obtido do milho, a redução é de 20%.

No Brasil, o etanol recebeu maior destaque a partir da década de 1970, e os veículos movidos a álcool, como esse combustível era conhecido, dominaram o mercado na década de 1980. Porém, o etanol passou por um momento de crise na década de 1990, quando o preço do petróleo baixou e era mais vantajoso para as usinas produzirem outros produtos, como o açúcar.

Em 2003 surgiram no Brasil os chamados veículos *flex*, que funcionam com etanol, gasolina ou a mistura desses dois combustíveis. Apesar de receber críticas em relação ao consumo de combustível, esses veículos podem ajudar o consumidor a se proteger da variação de preços nos postos e, quem sabe, de um problema maior de desabastecimento como o que ocorreu um tempo atrás.

4 **Produção de etanol**

O caldo da cana é filtrado, fermentado e destilado. A usina produz vários tipos de etanol, entre eles o hidratado e o anidro. O que os diferencia é o teor de água, 4% no hidratado e 0,5% no anidro.

5 **Etanol nos postos**

O etanol hidratado é vendido puro para abastecer veículos *flex*. A gasolina no Brasil tem em sua composição entre 20% e 25% de etanol anidro.

Conversando sobre o assunto

a) Os veículos automotores poluem o ar que respiramos, sejam eles movidos a gasolina ou a etanol. Cite algumas medidas que podem ser tomadas no dia a dia para diminuir essa poluição.

b) Se em certo posto de combustível o preço do litro da gasolina é R$ 2,90 e do etanol é R$ 2,15, com qual dos dois combustíveis é mais vantajoso financeiramente abastecer um veículo *flex*? Justifique.

c) Representando por x o preço da gasolina e por y o preço do etanol, qual dos itens indica que, financeiramente, equivale abastecer um veículo *flex* com qualquer um dos dois combustíveis?

$x = y$ $\quad \frac{70}{100}x = y$ $\quad x = \frac{70}{100}y$

147

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 146-147

O capítulo 7 desta obra trata de equações, sistemas de equações e inequações. É apresentado ao estudante um texto sobre produção de etanol no Brasil, além dos benefícios e desvantagens de sua utilização como combustível para veículos automotores. O texto encerra-se fazendo a comparação do custo x benefício do uso da gasolina em relação ao etanol e mostra como calcular o preço do etanol em função do preço da gasolina, tendo em vista os preços praticados pelo mercado na ocasião. Embora seja importante, contextualizar os conteúdos matemáticos em outros campos, atendendo a um apelo de interdisciplinaridade, e, nesse sentido, o texto é interessante, novamente não se explora nessa situação o conceito de variável e de função ai presentes e a relação desse estudo com o que o precedeu e o que será tratado a seguir.

3.2.11 Análise do conteúdo "Equações do 1º grau com uma incógnita"

Quadro 13 – Análise do tema: Equações, sistemas de equações e inequações

Conteúdo	**Observações**	**Unidades de análise**
Equações, sistemas de equações e inequações	a) Apresenta um texto sobre produção de etanol no Brasil, benefícios e desvantagens. b) Faz comparação custo x benefício do uso da gasolina e do etanol.	
Equações do 1º grau com uma incógnita	a) Introduz o conteúdo por meio de uma situação-problema. b) Escreve a situação-problema em forma de equação e identifica os membros. c) Resolve a equação utilizando o princípio aditivo e multiplicativo. d) Apresenta nota explicativa sobre o princípio aditivo e multiplicativo. e) Define equação como sentença expressa por uma igualdade e pelo menos uma letra. f) Define incógnita e raiz da equação. g) Faz breve comentário sobre circulação de moedas no Brasil, que é um item presente na situação-problema.	2 3 4 5.1.2 5.2.3 5.3.1 5.4.1 5.4.4 5.4.6
Equações do 1º grau com duas incógnitas	a) Apresenta uma equação em linguagem retórica. b) Escreve essa equação em linguagem simbólica. c) Constrói tabelas com possíveis valores para as incógnitas. d) Apresenta a forma geral de uma equação do 1º grau com duas incógnitas. e) Apresenta exemplos de equações do 1º grau com duas incógnitas envolvendo números racionais e irracionais. f) Apresenta os valores das tabelas em forma de pares ordenados e representa-os no plano cartesiano. g) Explica que existem infinitos pares ordenados que satisfazem a equação e dá exemplos. h) Traça o gráfico que representa a solução da equação.	1 4 5.1.2 5.1.3 5.2.2 5.2.3.2 5.3.1 5.4.1

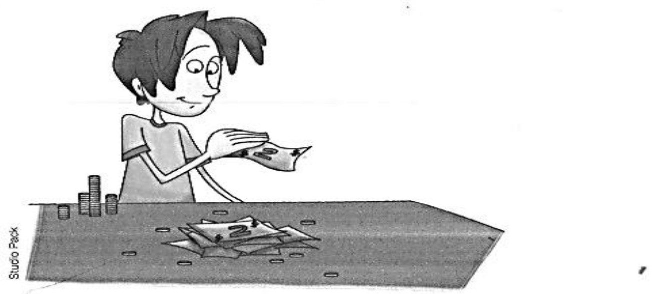
Sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas	a) Introduz o conteúdo por meio de uma situação-problema. b) Explica como escrever os dados do problema em forma de equações. c) Representa o sistema de equações encontrado de forma algébrica. d) Exemplifica que uma das formas de resolver o sistema é por meio da atribuição de valores arbitrários. e) Representa graficamente a solução do sistema. f) Interpreta o gráfico de solução do sistema. g) Discute exemplos de sistemas sem solução e com infinitas soluções. h) Recorda as definições de retas concorrentes, paralelas e coincidentes. i) Apresenta os gráficos de sistemas sem solução e com infinitas soluções.	1 2 4 5.1.2 5.1.3 5.1.4 5.2.3 5.2.3.2 5.2.5 5.4.1 5.4.4
Método da substituição	a) Introduz o conteúdo por meio de uma situação-problema. b) Explica como escrever os dados do problema em forma de equações. c) Representa o sistema de equações encontrado de forma algébrica. d) Apresenta uma sequência de procedimentos operatórios que constituem o "método da substituição". e) Faz breve comentário sobre a natação brasileira nos jogos Pan-americanos de 2011, que é o tema central da situação-problema apresentada. f) Apresenta um outro sistema a ser resolvido pelo "método da adição". g) Apresenta uma sequência de procedimentos operatórios que constituem o método da adição. h) Utiliza balanças de dois pratos para ilustrar o procedimento do método da adição. i) Apresenta um terceiro exemplo de sistema, onde as incógnitas não apresentam valores opostos. j) Apresenta uma sequência de procedimentos operatórios para resolver sistemas desse tipo pelo método da adição. l) Representa graficamente a solução do sistema. m) Apresenta um quarto exemplo de sistema, onde as incógnitas não apresentam valores opostos, e que apresenta um nível de dificuldade maior em aplicar os procedimentos para resolução pelo método da adição. n) Apresenta uma sequência de procedimentos operatórios para resolver o sistema dado. o) Representa graficamente a solução do sistema.	4 5.1.2 5.1.4 5.2.3 5.2.3.2 5.3.2 5.4.1 5.4.4

Inequações do 1º grau com uma incógnita	a) Apresenta a comparação do volume de sólidos geométricos para introduzir o conteúdo. b) Recorda como calcular o volume de um cubo e de um paralelepípedo. c) Realiza o cálculo do volume dos sólidos dados. d) Representa algebricamente os dados da questão por meio de uma inequação. e) Define inequações como sentença expressa por uma desigualdade de por pelo menos uma incógnita. f) Apresenta uma sequência de procedimentos operatórios para resolver uma inequação. g) Representa graficamente a solução da inequação. h) Verifica a validade da solução encontrada. i) Discute o comportamento das inequações quando nos dois membros são realizadas operações com números negativos. j) Apresenta exemplos e a representação gráfica das respectivas soluções das inequações.	4 5.1.2 5.1.4 5.2.2 5.2.3.2 5.2.4.1 5.3.1 5.4.1 5.4.1

Figura 45–Equações do 1º grau com uma incógnita

Equações do 1º grau com uma incógnita

Rafael possui R$ 43,50, sendo R$ 17,50 em moedas e o restante em cédulas de 2 reais.



Podemos determinar, por meio de uma **equação**, quantas cédulas de 2 reais Rafael possui. Para isso, chamamos de **x** a quantidade de cédulas de 2 reais e escrevemos a equação:

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{2x}+\boxed{17{,}50}}^{1^{\underline{o}}\text{ membro}}}_{} = \overbrace{\boxed{43{,}50}}^{2^{\underline{o}}\text{ membro}}$$

valor em cédulas de 2 reais — $2x$; valor em moedas — $17{,}50$; valor total que Rafael possui — $43{,}50$

Podemos resolver essa equação utilizando os princípios aditivo e multiplicativo da igualdade.

$$2x + 17{,}50 = 43{,}50$$
$$2x + 17{,}50 - 17{,}50 = 43{,}50 - 17{,}50 \quad \Rightarrow \text{ Subtraímos 17,50 nos dois membros.}$$
$$2x = 26$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{26}{2} \quad \Rightarrow \text{ Dividimos os dois membros por 2.}$$
$$x = 13$$

Portanto, Rafael possui 13 cédulas de 2 reais.

▸ ***Equação** é uma sentença matemática expressa por uma igualdade em que há pelo menos uma letra que representa um número desconhecido, chamada **incógnita**. Resolver uma equação é encontrar o valor desconhecido da incógnita, ou seja, obter a **solução** ou a **raiz** da equação.*
*Na equação $2x + 17{,}50 = 43{,}50$, por exemplo, a incógnita é **x** e a raiz ou solução da equação é $x = 13$, pois $2 \cdot 13 + 17{,}50 = 43{,}50$.*

Resolução de equações
Matemáticos egípcios e babilônios, há cerca de 4000 anos, já demonstravam interesse pela resolução de equações, que era feita passo a passo, e as incógnitas eram representadas por figuras e palavras.

Moedas em circulação
Em novembro de 2010, circulavam no Brasil mais de 16 bilhões de moedas. Mesmo com toda essa quantidade, em algumas regiões do país faltam moedas, principalmente no comércio. De acordo com o Banco Central, parte das moedas em circulação está esquecida em gavetas, bolsos etc., causando prejuízo à economia do Brasil e aos proprietários dessas moedas.

*Lembre-se de que pelo **princípio aditivo** a igualdade não se altera ao adicionarmos ou subtrairmos um mesmo número nos dois membros de uma equação. E pelo **princípio multiplicativo**, a igualdade se mantém ao multiplicarmos ou dividirmos os dois membros da equação pelo mesmo número diferente de zero.*

148

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 148

O conteúdo é introduzido por meio de uma situação-problema envolvendo dinheiro. Após identificar os dados do problema, eles são escritos em linguagem algébrica, o que resulta em uma equação. Desta forma é possível compreender as equações na perspectiva da concepção de álgebra como procedimentos para resolver certos tipos de problemas (USISKIN, 1995).

Após identificar os membros da equação, esta é resolvida aplicando-se os princípios aditivo e multiplicativo. Os autores definem equação como sentença expressa por uma igualdade e pelo menos uma letra, além de definir incógnita e raiz da equação. Também apresentam nota explicativa sobre o princípio aditivo e multiplicativo, e dado histórico dos egípcios e babilônios interessados na resolução de equações e os métodos que utilizavam, contextualizando também as equações em seu desenvolvimento histórico.

O tema do problema trata de uma realidade próxima dos alunos, e para além dos procedimentos, busca-se dar significado às equações. Por fim, é apresentado um breve comentário sobre circulação de moedas no Brasil, que é um item presente na situação-problema.

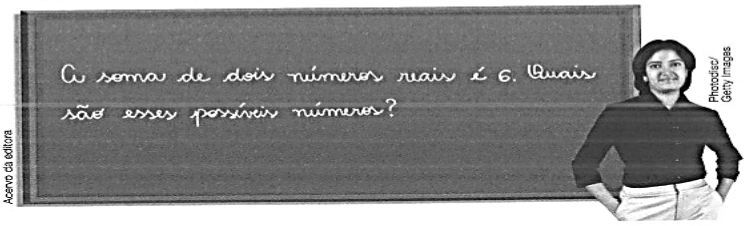
Geralmente as equações do 1º grau já foram estudadas pelos alunos até o 7º ano do ensino fundamental. Se o conteúdo é visto novamente, espera-se que ao menos lhe seja conferido maior nível de aprofundamento. Como já dissemos, a abordagem centrou-se na concepção de álgebra como procedimentos para resolver certos tipos de problemas, que conforme advertem Lins e Gimenez (2011) considerar que a atividade algébrica é resolver problemas, resume-a em “fazer ou usar álgebra”, que é uma abordagem superficial. A atividade algébrica é também resolver problemas, mas vai muito além disso. Dois aspectos que poderiam ser destacados são o papel da “letra” numa equação, que é o de “incógnita” e não o de “variável”, e ainda a relação de uma equação com os polinômios.

3.2.12 Análise do conteúdo "Equações do 1º grau com duas incógnitas"

Figura 46–Equações do 1º grau com duas incógnitas

Equações do 1º grau com duas incógnitas

Observe o problema que a professora escreveu na lousa.



Podemos resolver esse problema utilizando uma equação. Para isso, chamamos de **x** e de **y** os números procurados.

$$x + y = 6$$

A seguir, temos alguns possíveis valores de **x** e de **y**.

x	y	x + y
6	0	6 + 0 = 6
5	1	5 + 1 = 6
4	2	4 + 2 = 6
3	3	3 + 3 = 6

x	y	x + y
2	4	2 + 4 = 6
1	5	1 + 5 = 6
0	6	0 + 6 = 6

Dizemos que x + y = 6 é uma equação do 1º grau com duas incógnitas, x e y.

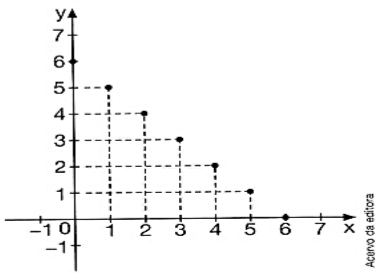
- ***As equações que podem ser escritas na forma $ax+by=c$, em que a, b e c são números reais, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, são chamadas equações do 1º grau com duas incógnitas. Exemplos:***
  - $\frac{1}{2}x+5y=-4$
  - $3a-2b=11$
  - $x+\sqrt{5}y=-5$
  - $-3x+7y=0$
  - $4m+6n=-\frac{1}{5}$
  - $\frac{2}{3}x-\sqrt{2}y=3$

As equações a seguir não são do 1º grau com duas incógnitas.

- $x^2 + 4x = 9$
- $-2x + 6 = 13$
- $3a - \sqrt{b} = 12$
- $4a - 3b + c = 0$
- $x^2 + y = 31$
- $2m^3 - 3n^2 = 6$

As soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas podem ser expressas por pares ordenados (x, y) e representadas graficamente. Em relação à equação x + y = 6, os pares ordenados (6, 0), (5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5) e (0, 6) correspondem a algumas de suas soluções.

Observe como podemos representar esses pares ordenados em um plano cartesiano.



Note que os pontos representados no plano cartesiano sugerem uma reta.

152

Podem ser atribuídos infinitos valores para x, obtendo infinitos valores correspondentes para y. Para $x = 2,5$, por exemplo, temos:

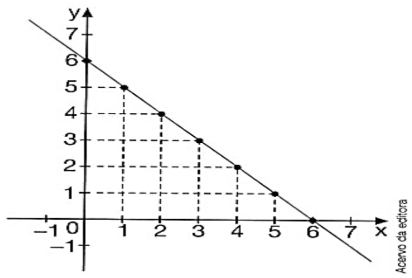
$$x + y = 6$$
$$2,5 + y = 6$$
$$2,5 - 2,5 + y = 6 - 2,5$$
$$y = 3,5$$

Assim, obtemos o par ordenado $(2,5; 3,5)$.

Veja outros valores que podem ser atribuídos a x.

x	$x + y = 6 \rightarrow y = 6 - x$	(x, y)
-1	$y = 6 - (-1) = 7$	$(-1, 7)$
$\frac{3}{2}$	$y = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$
2,56	$y = 6 - 2,56 = 3,44$	$(2,56; 3,44)$
8	$y = 6 - 8 = -2$	$(8, -2)$

Portanto, há infinitos pares ordenados que expressam soluções da equação. Em um plano cartesiano, esses pares ordenados são representados por pontos que constituem uma reta.



Os pares ordenados correspondentes aos pontos que pertencem à reta expressam as soluções da equação $x + y = 6$.

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 152-153

O conteúdo foi introduzido por meio de uma equação em linguagem retórica e em seguida em linguagem algébrica, mas sem que esta característica tenha sido explorada. A forma de abordar o conteúdo deve corresponder ao objetivo final da aprendizagem, e por isso a pertinência de se explorar ao máximo suas possibilidades. Em diversos momentos, os conteúdos têm sido apresentados em forma de situação-problema, que, se bem contextualizadas e exploradas do ponto de vista do conhecimento matemático, favorecem a compreensão dos conceitos a serem aprendidos. Nesse sentido, esclarece-nos Lins e Gimenez (2001, p. 115):

> Mas, se por outro lado, a conversa se vira na direção de “causos”, de situações específicas nas quais isso ou aquilo aconteceu, a natureza de nossas considerações muda. É pouco provável que alguém mencione, numa conversa genérica, o fato de ter visto chover sem que houvesse nuvens acima de sua cabeça, mas, numa conversa de “causos”, essa é uma história com grandes chances de vir à tona.

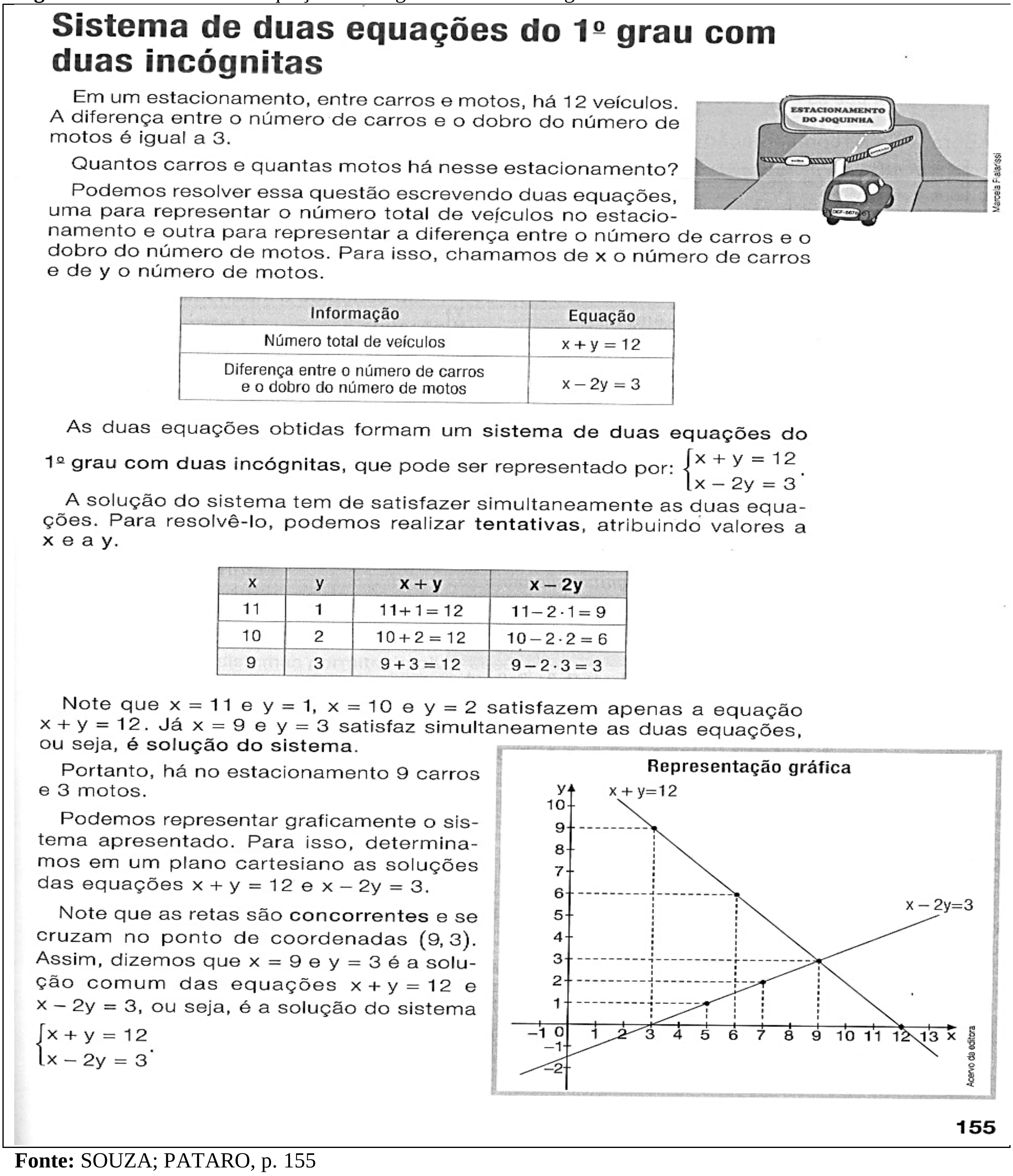
Essa consideração dos autores, nos leva a pensar que as “contextualizações”, tão sugeridas hoje no ensino da matemática, não garantem a apropriação dos conceitos teóricos, pois isso exige a apropriação do que é geral, dos nexos internos dos conceitos.

Para resolver a equação, foram construídas tabelas com possíveis valores para as incógnitas, o que posteriormente foi explorado na apresentação da solução do problema na forma de pares ordenados e na construção do gráfico da equação. É apresentada a forma geral de uma equação do 1º grau com duas incógnitas e por fim exemplos envolvendo números racionais e irracionais. A ideia de variáveis e de função também já deveria ser explorada dentro da perspectiva de inter-relação entre os conceitos. Entretanto, isso que constitui a essência fica de fora.

Nessa abordagem, entre outras, prevalecem as concepções de álgebra como procedimento para resolver certos tipos de problemas e como estudo de relações entre grandezas que variam. (USISKIN, 1995)

3.2.13 Análise do conteúdo "Sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas"

Figura 47–Sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas



Sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Em um estacionamento, entre carros e motos, há 12 veículos. A diferença entre o número de carros e o dobro do número de motos é igual a 3.

Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento?

Podemos resolver essa questão escrevendo duas equações, uma para representar o número total de veículos no estacionamento e outra para representar a diferença entre o número de carros e o dobro do número de motos. Para isso, chamamos de x o número de carros e de y o número de motos.

Informação	Equação
Número total de veículos	$x + y = 12$
Diferença entre o número de carros e o dobro do número de motos	$x - 2y = 3$

As duas equações obtidas formam um **sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas**, que pode ser representado por: $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$.

A solução do sistema tem de satisfazer simultaneamente as duas equações. Para resolvê-lo, podemos realizar **tentativas**, atribuindo valores a x e a y.

x	y	x + y	x − 2y
11	1	$11 + 1 = 12$	$11 - 2 \cdot 1 = 9$
10	2	$10 + 2 = 12$	$10 - 2 \cdot 2 = 6$
9	3	$9 + 3 = 12$	$9 - 2 \cdot 3 = 3$

Note que $x = 11$ e $y = 1$, $x = 10$ e $y = 2$ satisfazem apenas a equação $x + y = 12$. Já $x = 9$ e $y = 3$ satisfaz simultaneamente as duas equações, ou seja, **é solução do sistema**.

Portanto, há no estacionamento 9 carros e 3 motos.

Podemos representar graficamente o sistema apresentado. Para isso, determinamos em um plano cartesiano as soluções das equações $x + y = 12$ e $x - 2y = 3$.

Note que as retas são **concorrentes** e se cruzam no ponto de coordenadas $(9, 3)$. Assim, dizemos que $x = 9$ e $y = 3$ é a solução comum das equações $x + y = 12$ e $x - 2y = 3$, ou seja, é a solução do sistema $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$.

155

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 155

O conteúdo foi introduzido por meio de uma situação-problema, e, por meio de uma tabela, foram identificados os dados do problema e explicado como escrevê-los em forma de equações. A atribuição de valores arbitrários foi apresentada como uma das formas de resolver o sistema, como também a representação gráfica. Essa abordagem associa a álgebra à geometria, de um modo que não se refere apenas aos nexos externos dos conteúdos, mas remete a outras formas de representação, conforme já o dissemos anteriormente. Nesse caso, não se trata apenas de ilustração, que funciona apenas em algumas situações. Em seguida são discutidos exemplos de sistemas sem solução e com infinitas soluções e sua representação gráfica, inter-relacionando este conhecimento com as definições de retas concorrentes, paralelas e coincidentes.

3.2.14 Análise do conteúdo "Resolução de sistemas de duas equações pelos métodos da substituição e da adição"

Figura 48–Resolução de sistemas de duas equações pelos métodos da substituição e da adição I

Resolução de sistemas de duas equações pelos métodos da substituição e da adição

Vimos que podemos resolver um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas por tentativa ou graficamente. Porém, existem outros métodos para resolver esse tipo de sistema. Estudaremos a seguir os métodos da substituição e da adição.

Método da substituição

Em 2011, o Brasil participou dos Jogos Pan-americanos de Guadalajara, no México, com 515 atletas. O número de homens participantes foi maior que o de mulheres, uma diferença de 45 atletas.

Quantos homens e quantas mulheres compuseram a delegação de atletas do Brasil nesses jogos?

Para responder a essa questão, podemos escrever um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Para isso, chamamos de **x** o número de atletas homens e de **y**, o de mulheres.

Informação	Equação	Sistema
Número total de atletas	$x + y = 515$	$\begin{cases} x + y = 515 \\ x - y = 45 \end{cases}$
Diferença entre o número de homens e o de mulheres	$x - y = 45$	

Para resolvermos esse sistema pelo **método da substituição**, escolhemos inicialmente uma das equações e isolamos uma das incógnitas.

$$\begin{aligned} x + y &= 515 \\ x - x + y &= 515 - x \\ y &= 515 - x \end{aligned}$$

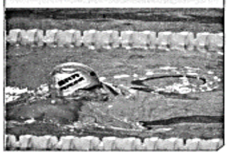
Nesse caso, escolhemos a equação $x + y = 515$ e isolamos a incógnita **y**.

Em seguida, substituímos **y** por $515 - x$ na outra equação e resolvemos a equação obtida, que possui apenas uma incógnita.

$$\begin{aligned} x - y &= 45 \\ x - (515 - x) &= 45 \\ x - 515 + x &= 45 \\ 2x - 515 + 515 &= 45 + 515 \\ 2x &= 560 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{560}{2} \\ x &= 280 \end{aligned}$$

A natação brasileira no Pan 2011

Nos jogos Pan-americanos de Guadalajara, a natação do Brasil obteve melhor resultado do que alcançara no Pan-americano Rio 2007. Ao todo foram 24 medalhas conquistadas, sendo 10 de ouro, 8 de prata e 6 de bronze. Thiago Pereira conquistou 6 medalhas de ouro, tornando-se o atleta brasileiro que mais venceu em pan-americanos. Ele também estabeleceu novo recorde pan-americano nos 200 m costas, com 1m57s19.



Daniel Moreno/Folhapress

159

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 159

Figura 49–Resolução de sistemas de duas equações pelos métodos da substituição e da adição II

Para determinar o valor de **y**, substituímos **x** por 280 em qualquer uma das equações do sistema.

$$\begin{aligned} x + y &= 515 \\ 280 + y &= 515 \\ 280 - 280 + y &= 515 - 280 \\ y &= 235 \end{aligned}$$

Nesse caso, substituímos **x** por 280 na equação $x + y = 515$.

Portanto, $x = 280$ e $y = 235$ são as soluções do sistema $\begin{cases} x + y = 515 \\ x - y = 45 \end{cases}$, ou seja, compuseram a delegação de atletas do Brasil 280 homens e 235 mulheres.

Método da adição

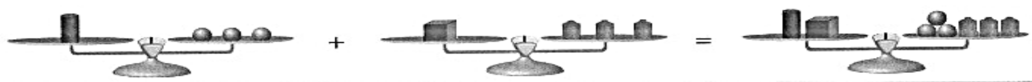
Além dos métodos apresentados, podemos resolver um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas pelo **método da adição**.

Veja como podemos resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 8 \end{cases}$ por esse método.

Note que as equações desse sistema apresentam os termos opostos **y** e **−y**. Adicionando essas equações membro a membro, a incógnita **y** será eliminada.

$$\begin{array}{r} x + y = 14 \\ \underline{x - y = 8} \\ 2x + 0y = 22 \Rightarrow 2x = 22 \end{array}$$

▸ ***Ao adicionarmos duas igualdades membro a membro, obtemos outra igualdade.***



Ilustrações: Acervo da editora

Resolvendo a equação $2x = 22$, temos:

$$\begin{aligned} 2x &= 22 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{22}{2} \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Agora, substituímos **x** por 11 em qualquer uma das equações do sistema.

$$\begin{aligned} x + y &= 14 \\ 11 + y &= 14 \\ 11 - 11 + y &= 14 - 11 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Nesse caso, substituímos **x** por 11 na equação $x + y = 14$.

Portanto, a solução do sistema é $x = 11$ e $y = 3$.

Alguns sistemas não apresentam termos opostos nas equações. Nesses casos, multiplicamos uma ou as duas equações por números escolhidos convenientemente, a fim de obter termos opostos. Observe os exemplos.

1º exemplo: $\begin{cases} 2x - y = 23 \\ x + 3y = 22 \end{cases}$

160

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 160

Figura 50–Resolução de sistemas de duas equações pelos métodos da substituição e da adição III

Para resolvermos esse sistema pelo método da adição, podemos inicialmente multiplicar por -2 a equação $x + 3y = 22$.

$$\begin{cases} 2x - y = 23 \\ x + 3y = 22 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} 2x - y = 23 \\ -2x - 6y = -44 \end{cases}$$

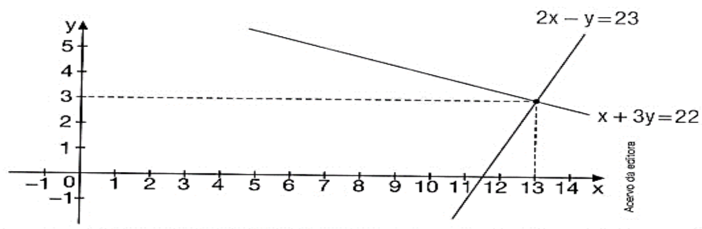
No sistema obtido há os termos opostos $2x$ e $-2x$.

Resolvendo o sistema obtido pelo método da adição:

$$\begin{array}{r} 2x - y = 23 \\ -2x - 6y = -44 \\ \hline 0x - 7y = -21 \end{array} \Rightarrow y = 3$$

$$2x - y = 23$$
$$2x - 3 = 23$$
$$2x - 3 + 3 = 23 + 3$$
$$2x = 26$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{26}{2}$$
$$x = 13$$

▸ *Representação gráfica do sistema:* $\begin{cases} 2x - y = 23 \\ x + 3y = 22 \end{cases}$



Portanto, a solução do sistema é $x = 13$ e $y = 3$.

2º exemplo: $\begin{cases} 2x - 7y = 4 \\ 3x + 5y = 37 \end{cases}$

Para obtermos nas equações termos opostos, podemos multiplicar a equação $2x - 7y = 4$ por -3 e $3x + 5y = 37$ por 2.

$$\begin{cases} 2x - 7y = 4 \\ 3x + 5y = 37 \end{cases} \begin{array}{c} \xrightarrow{\times(-3)} \\ \xrightarrow{\times 2} \end{array} \begin{cases} -6x + 21y = -12 \\ 6x + 10y = 74 \end{cases}$$

No sistema obtido há os termos opostos $-6x$ e $6x$.

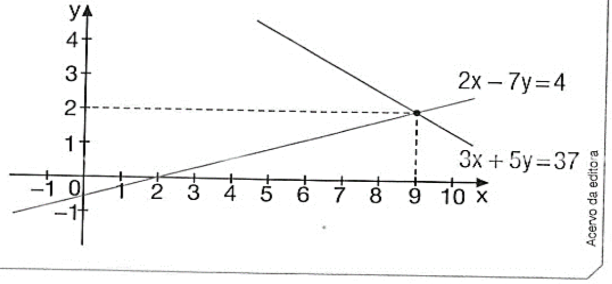
Resolvendo o sistema obtido pelo método da adição:

$$\begin{array}{r} -6x + 21y = -12 \\ 6x + 10y = 74 \\ \hline 0x + 31y = 62 \end{array} \Rightarrow y = 2$$

$$6x + 10y = 74$$
$$6x + 10 \cdot 2 = 74$$
$$6x + 20 = 74$$
$$6x + 20 - 20 = 74 - 20$$
$$6x = 54$$
$$\frac{6x}{6} = \frac{54}{6}$$
$$x = 9$$

161

▸ *Representação gráfica do sistema:* $\begin{cases} 2x - 7y = 4 \\ 3x + 5y = 37 \end{cases}$



Portanto, a solução do sistema é $x = 9$ e $y = 2$.

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 161-162

Este conteúdo também foi introduzido por meio de uma situação-problema e, por meio de uma tabela, foram identificados os dados do problema e explicado como escrevê-los em forma de equações. Em seguida foi apresentada uma sequência de procedimentos operatórios que constituem o “método da substituição”.

O tema central da situação-problema – a natação brasileira nos jogos Pan-americanos de 2011 – foi discutido em breve comentário, o que favorece a contextualização e possibilidade de aplicação do conhecimento matemático.

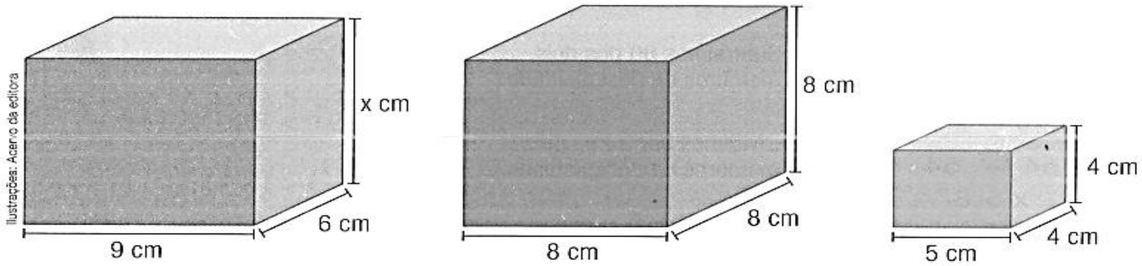
Foi apresentado outro sistema a ser resolvido pelo “método da adição”, e também uma sequência de procedimentos operatórios que constituem este método de resolução. Foram utilizadas balanças de dois pratos para ilustrar o procedimento deste método, e ainda um terceiro exemplo de sistema, onde as incógnitas não apresentam valores opostos, o que exige do estudante o acréscimo de procedimentos para resolvê-lo. Novamente, partimos da análise de Lins e Gimenez sobre os limites epistemológicos da abordagem letrista facilitadora. Chama a atenção que, ao apresentar os métodos de resolução, não se comenta a respeito da necessidade de fazer a substituição de variáveis ou a adição das equações, ainda que os princípios gerais dos métodos sejam apresentados, o que é importante, dentro da perspectiva que estamos adotando. Fica a pergunta: Qual é a necessidade desses procedimentos?

3.2.15 Análise do conteúdo "Inequações do 1º grau com uma incógnita"

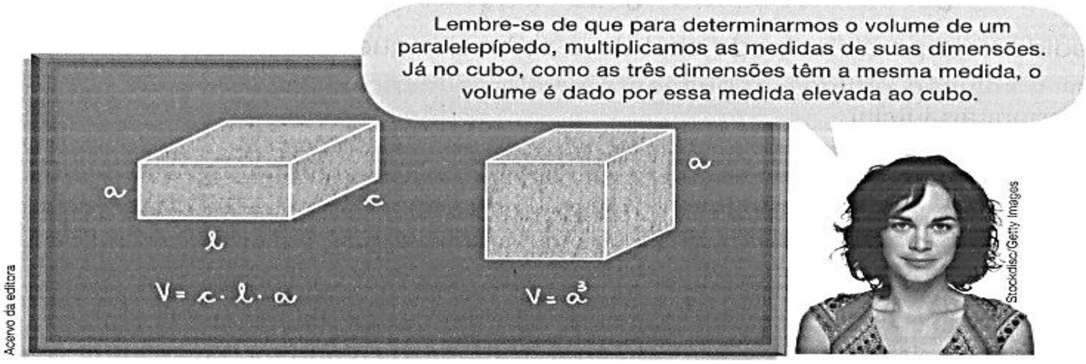
Figura 51–Inequações do 1º grau com uma incógnita I

Inequações do 1º grau com uma incógnita

No cubo e nos paralelepípedos a seguir estão indicadas suas dimensões.



Para quais valores de x a soma dos volumes dos paralelepípedos será maior que o volume do cubo?



Para resolvermos essa questão, inicialmente calculamos, em centímetros cúbicos, o volume de cada forma geométrica espacial.

- Volume do paralelepípedo azul: $9 \cdot 6 \cdot x = 54x$
- Volume do paralelepípedo verde: $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$
- Volume do cubo vermelho: $8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$

Como a soma dos volumes dos paralelepípedos deve ser maior que o volume do cubo, escrevemos uma sentença matemática chamada **inequação**.

$$\underbrace{54x + 80}_{1^{\underline{o}}\ \text{membro}} > \underbrace{512}_{2^{\underline{o}}\ \text{membro}}$$

(lê-se: 54x mais 80 **maior que** 512)

Nessa inequação, o 1º membro indica a soma dos volumes dos paralelepípedos e o 2º membro, o volume do cubo.

- ***Inequações*** *são sentenças matemáticas que possuem uma ou mais incógnitas e são expressas por uma das seguintes desigualdades: > (maior que), < (menor que), ≥ (maior ou igual a) e ≤ (menor ou igual a).*

  Exemplos:

  - $3x > 9$
    lê-se: 3x **maior que** 9
  - $2x \geq x + 3$
    lê-se: 2x **maior ou igual a** x mais 3
  - $5x - 2 < 8$
    lê-se: 5x menos 2 **menor que** 8
  - $-x \leq 12$
    lê-se: menos x **menor ou igual a** 12

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 165

Figura 52–Inequações do 1º grau com uma incógnita II

Podemos determinar a medida x no paralelepípedo azul resolvendo a inequação $54x + 80 > 512$. Para isso, isolamos a incógnita x em um dos membros da desigualdade.

$$54x + 80 > 512$$

$$54x + 80 - 80 > 512 - 80 \Rightarrow \text{Subtraímos 80 dos dois membros da desigualdade.}$$

$$54x > 432$$

$$\frac{54x}{54} > \frac{432}{54} \Rightarrow \text{Dividimos por 54 os dois membros da desigualdade.}$$

$$x > 8$$

A solução dessa inequação pode ser representada pela parte em destaque na reta real a seguir.

Acervo da editora

Portanto, a medida x no paralelepípedo azul deve ser maior que 8 cm.

A fim de validar a solução obtida, atribuímos a x valores menor, igual e maior que 8 na inequação inicial.

$x = 7$	$x = 8$	$x = 9$
$54x + 80 > 512$ $54 \cdot 7 + 80 > 512$ $458 > 512$ desigualdade falsa	$54x + 80 > 512$ $54 \cdot 8 + 80 > 512$ $512 > 512$ desigualdade falsa	$54x + 80 > 512$ $54 \cdot 9 + 80 > 512$ $566 > 512$ desigualdade verdadeira

Note que para o valor menor ou igual a 8, a desigualdade obtida é falsa. Já para o valor maior que 8, a desigualdade obtida é verdadeira.

- ***Em uma inequação, quando adicionamos ou subtraímos o mesmo número dos dois membros, a desigualdade não se altera. Isso também ocorre quando multiplicamos ou dividimos os dois membros por um mesmo número positivo.***

Veja o que ocorre quando multiplicamos ou dividimos uma desigualdade por um número negativo.

$$5 > -7$$
$$(-1) \cdot 5 < (-7) \cdot (-1)$$
$$-5 < 7$$

Note que, ao multiplicarmos os dois membros por um mesmo número negativo, temos de inverter a desigualdade para que ela fique verdadeira. Caso contrário, obteríamos uma desigualdade falsa ($-5 > 7$).

$$4 < 8$$
$$\frac{4}{-2} > \frac{8}{-2}$$
$$-2 > -4$$

O mesmo ocorre quando dividimos os dois membros por um mesmo número negativo. Nesse caso, também invertemos a desigualdade para que ela fique verdadeira.

- ***Quando multiplicamos ou dividimos os dois membros de uma inequação por um mesmo número negativo, invertemos o sinal da desigualdade para que a sentença obtida permaneça verdadeira.***

166

Fonte: SOUZA; PATARO, p. 166

Foi apresentada a comparação do volume de três paralelepípedos para introduzir o conteúdo. Recordou-se como calcular o volume de um cubo e de um paralelepípedo, e realizou-se o referido cálculo a partir do volume dos sólidos dados. Os dados da questão foram representados algebricamente por meio de uma inequação, a qual foi definida como sentença expressa por uma desigualdade de pelo menos uma incógnita.

Em seguida, foi apresentada uma sequência de procedimentos operatórios para resolver uma inequação e também a representação graficamente da solução encontrada. Aqui, novamente queremos retomar uma reflexão apresentada por Lins e Gimenez (2001) de que em geral os estudantes não veem mesmo relação entre o que é feito com o material "concreto" e o que é feito em termos de formalização de conteúdos. Estes autores chegam a afirmar que não existe mesmo ligação entre essas atividades, que elas são distintas e que possuem seus resultados localizados. Além de exemplos, representação gráfica e verificação de validade da solução encontrada, foram discutidas as propriedades das desigualdades, que são elementos caracterizadores gerais das inequações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, tomamos como objeto de estudo um ramo da matemática: a Álgebra. Procuramos analisar se a abordagem proposta nos livros didáticos de matemática do 8º ano do Ensino Fundamental favorece a aprendizagem de conceitos algébricos e possibilita o desenvolvimento das funções psíquicas superiores dos estudantes, com base nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural.

Assim, após um caminho percorrido, repleto de discussões, debates, leituras, delimitações, redimensionamentos e ajustes necessários para a realização deste trabalho, definimos a questão geradora da investigação, conforme segue: em que medida a abordagem proposta nos livros escolares de matemática do 8º ano do Ensino Fundamental favorece a aprendizagem de conceitos algébricos e possibilita o desenvolvimento das funções psíquicas superiores dos estudantes?

A partir de nossa experiência profissional, e, ao longo da trajetória da pesquisa, pudemos constatar que, embora o estudo da álgebra ocupe grande parte do currículo de matemática da escola básica, sua abordagem parece não corresponder às demandas de aprendizagem para alunos desse nível de ensino: “não significa necessariamente ausência de informações algébricas, mas ausência de reflexões críticas sobre esse ensino, isto é, a sua fossilização decorrente da não-percepção da necessidade de renovação que pudesse imprimir-lhe novas direções e novas significações.” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1992)

Ainda, segundo esses autores, no Brasil, a álgebra foi introduzida como disciplina a partir de 1799, e quase sempre após o ensino dos conteúdos de Aritmética. A partir de 1901, foi possível perceber a tentativa de fracionamento dos conteúdos dessas disciplinas ao longo das séries, como ocorre atualmente, porém, em linhas gerais, os tópicos mantiveram-se praticamente inalterados. Esse estado de inércia também está solidamente constituído nos livros didáticos.

Por outro lado, os PCN, ao estabelecerem diretrizes para o ensino de matemática na escola básica, têm destacado a necessidade de mudanças. Mas, embora os conteúdos propostos, os objetivos e as orientações didáticas tenham subjacentes muitas das concepções de álgebra que utilizamos como categoria de análise neste trabalho, pouco abordada é a relação entre pensamento e linguagem algébrica, causa, inclusive, dos muitos problemas relacionados ao seu ensino, particularmente a falta de significados atribuídos a essa linguagem, como apontado por educadores matemáticos que pesquisam e discutem a questão.

As análises feitas nos permitem concordar com Lins e Gimenez (2001), quando alertam que de algum modo, estas práticas correspondem à visão que se tem da atividade algébrica, do contrário elas não sobreviveriam por tanto tempo. Se o livro didático, que tem uma grande influência na organização do ensino, não oferecer alternativas ao que se tem, a concepção de atividade algébrica como cálculo com letras irá continuar, diziam os autores há mais de 10 anos (2001) e isso pudemos constatar que permanece, ainda que esforços sejam feitos para contextualizar os conteúdos, para promover a não fragmentação dos conteúdos.

Ao fixar o olhar sobre a Teoria Histórico-Cultural, concluímos que o objetivo da atividade didático-pedagógica é o desenvolvimento do ser humano, ou seja, é a transformação dos indivíduos, pela apropriação de conhecimentos e saberes, acumulados historicamente pela humanidade, com vistas a aprimorar suas condições de existência e a construção de um mundo melhor.Porém, apesar do reconhecimento da essencialidade do papel que a álgebra e a matemática têm para o desenvolvimento dos sujeitos, essa realidade ainda não foi suficientemente explorada de maneira tal que proporcione uma adequada reorganização da educação algébrica (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014).

De maneira mais pontual, por meio dessa pesquisa que analisou dois “livros didáticos” adotados pela Rede Municipal de Ensino de Uberaba nos últimos quatro anos, pudemos perceber indícios de que:

1) Nos dois materiais didáticos analisados, em muitas partes é realizada uma abordagem histórica de aspectos ligados ao desenvolvimento da álgebra, sem deixar clara a relação com o assunto que será abordado. A avaliação do PNLD para o livro de Souza e Pataro indica também esse aspecto, quando afirma que os textos da história da Matemática do livro pouco contribuem, para a aprendizagem do aluno (BRASIL, 2010). Em alguns temas foi possível perceber recortes históricos com visões parciais e limitadas. Esse tipo de encaminhamento é discutido pelos pesquisadores da Teoria Histórico-Cultural e também por educadores matemáticos, como Lins e Gimenez (2001), que pontuam encontrar em atividades algébricas desde a rigidez das caracterizações “puras” por conteúdos até uma certa despreocupação em identificar, do ponto de vista do conteúdo, que tipo de atividade matemática particular está acontecendo. Para eles, não se pode esquecer que há um conhecimento teórico, institucionalizado pela escola, do qual a educação matemática deve se ocupar. Se há propostas de educação algébrica, que parecem não se preocupar com isso, é porque seus defensores acreditam que, ao longo do tempo, esse saber deve aparecer naturalmente ou por direcionamento do professor. Na perspectiva da Teoria Histórico-

Cultural, o ensino adequadamente organizado e intencional é capaz de promover e até acelerar a aprendizagem e o desenvolvimento dos estudantes. Ao trazer fragmentos da história da álgebra, não percebemos que os autores tenham a intenção de conduzir o estudante no movimento lógico-histórico ou histórico-lógico, como diz Moura (2014), pois os conceitos algébricos não são conceitos empíricos, palpáveis. Insistir nos aspectos externos dos conceitos é promover um ensino que não conduz à produção de significados e sentidos para os conceitos algébricos, pelos alunos.

2) Percebemos uma preocupação dos autores de ambas as coleções de "contextualizar" os conteúdos e de estabelecer "pontes" entre os conhecimentos matemáticos e as outras áreas de conhecimento e as situações da vida dos alunos. Entretanto, em ambas as obras, a exploração da situação de contextualização não foca aquilo que é essencial para a apropriação de conceitos algébricos, que são fundamentais na álgebra a esse nível. Isso ocorre com as situações que introduzem a álgebra, elas lidam com variáveis e com o conceito de função. Entretanto, esses conceitos não são explorados. As situações são apenas ilustrativas, com foco nas expressões algébricas, nos nexos externos. As expressões algébricas passam a se constituir em palavras sem significado, ou como diz Vigotski (2010), palavras vazias, pois não se atrelam ao pensamento algébrico, que é, por sua natureza, teórico, fruto das generalizações, das abstrações e das relações. O pensamento científico, a essência, corre o risco de ficar fora da organização do ensino, se o professor não perceber o que é proposto e como o é no livro didático.

3) Nas abordagens propostas no material didático, muito se espera da atuação do professor durante sua utilização. A pertinência do livro didático está condicionada ao emprego que se dá a ele nos diferentes contextos educativos. Assim, não é imprescindível o quão bom ou ruim seja o livro didático, é o professor enquanto organizador dos processos de ensino quem realmente fará a diferença. Porém, é preciso considerar o caráter de "autoridade" que os conhecimentos veiculados pelos livros didáticos e a forma como são organizados exercem sobre o professor, daí não descartamos a importância de que devam favorecer o seu trabalho e o do aluno.

4) Há necessidade de mudanças nos métodos de ensino e políticas públicas para a formação de professores, já que está provado que não é suficiente dotar as escolas e, consequentemente, os professores de livros e treiná-los para utilizá-los. O professor carrega suas concepções para a sala de aula, inclusive o que ele pensa sobre a educação, a aprendizagem e o ensino da matemática.

5) Grande parte dos conteúdos é apresentado por meio de situações-problema que contém conceitos fundamentais da álgebra, como o de variáveis e o de função, os quais não são explorados devidamente. Lins e Gimenez (2001) tecem uma crítica sobre esse método, pois ao considerar que a atividade algébrica é resolver problemas, realiza-se uma descrição superficial dessa atividade resumindo-a em “fazer ou usar álgebra”. A atividade algébrica é também resolver problemas, mas vai muito além disso, como pudemos constatar nas diferentes concepções de álgebra discutidas por educadores matemáticos e inseridas neste trabalho.

6) Outro recurso bastante utilizado nas duas coleções é a associação de expressões algébricas a perímetro e área de figuras geométricas planas e a volumes de sólidos geométricos. Ainda que a não fragmentação dos diversos campos da matemática seja necessária e que, historicamente, o pensamento algébrico tenha sido expresso nas construções geométricas, isso não é suficiente para que o aluno construa significados para os conceitos algébricos, que não são empíricos. Essa busca de recursos geométricos para dar significados ao pensamento algébrico tem limites internos ou epistemológicos, impostos por condições próprias das medidas. Concordamos com pesquisadores da área, como Lins e Gimenez (2001), que não há uma generalização dessas situações particulares para uma situação geral, ou seja, não há passagem desse pensamento empírico para o teórico, pois esse exige ruptura com o sensível, o palpável. De acordo com Davidov (1982), citado por Sforni (2004), a generalização na adolescência é fruto da análise mental das relações e conexões dos objetos. A formação dos conceitos depende da habilidade de realizar ações mentais tais que sejam capazes de transformar o objeto em algo conhecido; conhecer sua essência. O pensamento conceitual teórico-científico do aluno deve orientá-lo a generalizações próprias da gênese constitutiva do objeto de estudo, chegando a conceitos essenciais que superam aqueles que circundam as aparências do objeto, de acordo com Libâneo e Freitas (2013). Nesse sentido, esse apelo aos recursos geométricos torna palpável o trabalho com as expressões algébricas, mas não garante a apropriação das relações gerais que são próprias dos conhecimentos algébricos.

A pesquisa também nos permitiu corroborar com o que muitos autores vêm indicando e questionando a respeito do sistema simbólico e das concepções de álgebra que caracterizam a atividade algébrica. Há uma preocupação com a representação – monômios são caracterizados como produto de letras e números e polinômios como soma de monômios. Mas o que essas letras representam? Essa é uma questão que vem persistindo, ainda que a linguagem algébrica tenha muitas vantagens, ela não pode sobrepor-se aos processos de pensamento, generalização e abstração, como assinalam Sousa, Panossian e Cedro (2014). Pensar o ensino-aprendizagem da álgebra supõe pensar inevitavelmente na questão da linguagem, considerando que pensamento e linguagem se relacionam e se influenciam fazendo parte de um único processo – o da formação de conceitos, como nos ensina Vigotski (2010). Os significados construídos socialmente pelos homens, ao longo da história têm que ser apropriados, internalizados pelo aluno, de modo que lhe façam sentido, mesmo sabendo que esses sentidos são mutáveis.

Estamos convencidas de que algumas práticas pedagógicas não vislumbram a capacidade impulsionadora do desenvolvimento integral dos estudantes através das atividades de ensino-aprendizagem. Assim, esse estudo teórico também nos levou a uma compreensão maior sobre os princípios básicos da Teoria Histórico-Cultural, ao mesmo tempo em que nos despertou para a necessidade de continuar a estudar outros aspectos da teoria que estão diretamente relacionados com o objetivo aqui proposto, tais como a proposta de atividades matemáticas que levem em consideração a organização do ensino de acordo com a Teoria Histórico-Cultural.

Da mesma forma, temos alguma intenção em motivar iniciativas de produção de material didático dentro da abordagem Histórico-Cultural e fornecer parâmetros para discussões acerca dos objetivos da produção de materiais didáticos para alunos do ensino fundamental, tendo em vista que a preparação de um livro didático deve estar fundamentada e embasada por uma teoria capaz de nortear todo o conjunto da obra, o que envolve uma visão clara de ensino, de aprendizagem e os objetivos pretendidos com estes empreendimentos.

Para nós, este trabalho representa um marco importante em nosso desenvolvimento profissional. Como professoras de matemática nos sistemas de ensino, ao longo da pesquisa, os aspectos presentes nesta dissertação modificaram a nossa visão e atuação.

Concluímos como assevera Mészáros (2005, p. 9): “... transformar essas ideias e princípios em práticas concretas é uma tarefa a exigir ações que vão muito além dos espaços das salas de aula, dos gabinetes e dos fóruns acadêmicos.”

A compreensão de conceitos científicos está ligada à compreensão do significado das palavras. “Para o ensino que desenvolve o ser humano como um todo é necessário que o socialmente significativo se torne pessoalmente significativo” (ARAÚJO, 2013, p. 27).

Essa apropriação, por sua vez se dá por meio da linguagem, que assim como o trabalho é um elemento mediador da atividade da consciência e das relações humanas com o outro e consigo mesmo. A linguagem tanto permite desenvolver a consciência quanto compartilhar com os outros o que nela se passa.

REFERÊNCIAS

ADRIÃO, T.; GARCIA, T. G.; BORGHI, R.; ARELARO, L. R. G. Uma modalidade peculiar de privatização da educação pública: a aquisição de “sistemas de ensino” por municípios paulistas. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 30, n. 108, p. 799-818, 2009.

ADRIÃO, T.; GARCIA, T. G.; BORGHI, R.; ARELARO, L. R. G. As parcerias entre prefeituras paulistas e o setor privado na política educacional: expressão de simbiose?. **Educação & Sociedade**, v. 33, n. 119, p. 533-549, 2012.

ALVES, A. M. **O método materialista histórico dialético: alguns apontamentos sobre a subjetividade.** Revista de Psicologia da UNESP, 10(1), p. 1-13, 2010. Disponível em: <http://www2.assis.unesp.br/revpsico/index.php/revista/article/viewFile/74/214> Acesso em: 01 de setembro de 2013.

AQUINO, O. F. L. V. Zankov: aproximações à sua vida e obra. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V (Org.). **Ensino Desenvolvimental**: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013.

ARAUJO, E. S. Rubstein: um grande psicólogo, uma grande personalidade. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V (Org.). **Ensino Desenvolvimental**: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013.

AVANCINI, M. A peso de ouro. **Revista Educação**, agosto 2011. Disponível em:http://revistaeducacao.uol.com.br/textos/164/artigo234884-1.asp. (reportagens) Acesso em: 08 de dez. 2014

BATISTA, A. A. G.(Elab.) **Recomendações para uma política pública de livros didáticos-** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental, 2001.

BATTISTI, I. K. NEHRING, C. M. **A Concreticidade no Processo de Ensinar e Aprender Álgebra no Contexto Escolar.** Ijuí, 2009**.** Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_2.pdf> Acesso em: 07 de set.2013.

BERNARDES, M. E. M.O Método de Investigação na Psicologia Histórico-Cultural e a Pesquisa sobre o Psiquismo Humano. **Psicologia Política,** v. 10 nº 20, 2010, p. 345-361.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil:** promulgada em 5 de outubro de 1988. OLIVEIRA, J.(Org.) 4. ed. São Paulo: Saraiva, 1990. 168 p. (Série Legislação Brasileira).

BRASIL, LDB. Lei 9394/96. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Disponível em: portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/ldb.pdf. Acesso em: 17 set.2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997. 126p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. 5ª a 8ª séries.** Brasília: MEC/SEF, 1998.148 p.

BRASIL/ MEC. **Guia de Livros Didáticos**: PNLD 2008: Matemática. Brasília: MEC, 2007.

BRASIL/MEC. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2011: Matemática. Brasília: MEC, 2010.

CÂMARA, N. S. Análise comparativa entre o livro didático e a apostila. SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE ENSINO DE LÍNGUA PORTUGUESA – SIELP. Anais do SIELP. Vol.2, N.1. Uberlândia: EDUFU, 2012. Disponível em: http://www.ileel.ufu.br/anaisdosielp/wp-content/uploads/2014/07/volume_2_artigo_239.pdf. Acesso em 01 jul.2007.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

DA SILVA, L. C. M.; DAS FLORES V., E.; NOVIKOFF, C. Análise do rendimento escolar de turmas do 9º ano no simulado de Matemática da Prova Brasil: um estudo exploratório na rede pública municipal de Duque de Caxias/RJ**. Revista Práxis,** v. 3, n. 6, 2013. Disponível em: <http://www.foa.org.br/praxis/numeros/06/19.pdf> Acesso em: 18 de ago. 2013.

DAVIDOV, V. V. Problemas do ensino desenvolvimental: a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. Tradução de LIBÂNEO, J. C. e FREITAS, R A. M. da M.**Soviet Education,** August,v. XXX, n. 8, 1988

DA VIDOV, V. V. O que é a atividade de estudo. Tradução de LIBÂNEO, J. C. e FREITAS, R A. M. da M. **Revista Escola Inicial**. n. 7, 1999.

DELARI JUNIOR, A. Prefácio. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V (Org.). **Ensino Desenvolvimental**: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013.

DUARTE, N. A anatomia do homem é a chave da anatomia do macaco: a dialética em Vigotski e em Marx e a questão do saber objetivo na educação escolar. **Educação e Sociedade**, v. 21, n. 71, p. 79-115, 2000. Disponível em http://www.scielo.br/pdf/es/v21n71/a04v2171.pdf. Acesso em 01 mar. 2014.

DUARTE, N.A teoria da atividade como uma abordagem para a pesquisa em educação. **Perspectiva**, Florianópolis, v. 20, nº 2, jul./dez, p. 279-301, 2002.

FIGUEIREDO, A. C. **Saberes e concepções de educação algébrica em um curso de licenciatura em matemática**. 290f. Tese de (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar a educação algébrica elementar. **Pro-Prosições**, nº 4, v. 1(10), p. 79-91, 1993.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A.;.Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo? In: **Pro-posições**, vol.- nº 1 [7], p.39-53, março de 1992.

GALPERIN, P. Ya. Tipos de orientación y tipos de formación de acciones y de los conceptos. In: ROJAS, L. Q. (Comp.) **La formación de las funciones psicológica durante el desarollo del niño**. Tlaxcala: Editora universidad Autónoma de Tlaxcala. 2001, p. 41-56

GIL, Antonio Carlos. **Como Elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

______ **Métodos e técnicas de pesquisa social.**6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GÓES, M. C. R; CRUZ, M. N. Sentido, significado e conceito: notas sobre as contribuições de Lev Vigotski. **Pro-Posições**, v. 17, n. 2 (50), p. 31-45, 2006.

HEDEGAARD,M.; CHAIKIN, S.**Radical-Local Teaching and Teaching. A cultural-historical approach.** Tradução de LIBÂNEO, J. C. e FREITAS, R A. M. da M. Aarthus (Dinamarca): Aartrhus University Press, 2005.

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Estimativas populacionais para os municípios brasileiros em 01.07.2014** Disponível em: http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/estimativa2014/estimativa_dou.shtm. Acesso em: 10 março 2015

JORNAL DA MANHÃ. Alunos da rede municipal recebem apostilas desenvolvidas pelo Cnec. **Jornal da Manhã,** Uberaba, 16 janeiro de 2011. Disponível em http://www.jmonline.com.br/novo/?noticias,2,cidade,40140. Acesso em 13 abr.2015

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual de usuário. **Em Aberto**, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996

LAZARETTI, L. M. Daniil Borisovich Elkonin: vida e as produções de um estudioso do desenvolvimento humano. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V (Org.). **Ensino Desenvolvimental**: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1990.

LIBÂNEO, J. C. Didática e Prática de Ensino e a abordagem da diversidade social na escola. XVII Encontro Nacional Didática Prática Ensino - ENDIPE, 2014. Disponível em: professor.pucgoias.edu.br/.../Fortaleza%20ENDIPE%20Libâneo.docx. Acesso em: 10 dez. 2014

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. da M. Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-cientíco. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Ensino Desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013.

LIMA, E. G. Para compreender o livro didático como objeto de pesquisa**. Educação e Fronteiras On-Line,** v. 2, n. 4, p. p. 143-155, 2012.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas, SP: Papirus, 2001.

LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs). **Ensino Desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU. 2013

LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. Escola e didática desenvolvimental: seu campo conceitual na tradição da teoria histórico-cultural**.** ***Educ. rev***. [online]. 2013, vol. 29, n.1, pp. 247-271. Epub Jan 24, 2013.http://www.scielo.br/pdf/edur/v29n1/aop_224.pdf.

LONGAREZI, A. M.; FRANCO, P., A. N. Leontiev: a vida e a obra do psicólogo da atividade. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Ensino Desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013.

LORENZATO, S.; FIORENTINI, D. **O profissional em Educação Matemática**. Santos, SP: UNISANTA, 2001.

LUCA, T. R. de . **O debate em torno dos livros didáticos de História**. In: MALATIAN, Teresa (org.). Caderno de Formação. 3. ed. São Paulo: Cultura Acadêmica: Univesp, 2012.

MARX, K**. Introdução ao capital de Karl Marx.** Disponível em:http://www.economiabr.net/biografia/km-o...Acesso em: 02 de nov.2013.

MARX, K**. Biografia de KARL MARX**. Disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=qOppfTvDKLg. Acesso em 02 nov.2012.

MARX, K. **O capital: crítica da economia política:** Livro I: o processo de produção do capital - São Paulo: Nova Cultural, 1996, p. 345 a 415.

MARX, K.; ENGELS, F.**Manifesto Comunista**, p. 8, 9, 22, 55 (fragmentos). São Paulo: Ched Editorial, 1980.

MEDEIROS, D. H;. GOULART, D. M. P. L. **Teoria histórico-cultural: contribuições para análise do livro didático de ciências.** Disponível em: http://www.ppe.uem.br/publicacoes/seminario_ppe_2009_2010/pdf/2010/025.pdf> Acesso em: 08 de abr. 2014.

MÉSZÁROS, István. **A educação para além do capital**. 1. ed. São Paulo: Boitempo editorial, 2005.

NÚÑES, I. B. **Vygotsky, Leontiev, Galperin:** formação de conceitos e princípios didáticos. Brasília: Liber Livro, 2009.

PRESTES, Z.; TUNES, E.; NASCIMENTO, R.In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V (Org.).**Ensino Desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russo**s**. Uberlândia: EDUFU. 2013.

PUENTES, R. V. Vida, pensamento e obra de A. V. Zaporozhets: um estudo introdutório. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V (Org.). **Ensino Desenvolvimental**: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013.

PUREZA, A. **A teoria tridimensional do capital em Marx.** Disponível em http://www.webartigos.com/articles/5210/...Acesso em 02 de nov. 2013.

REPKIN, V. V. Ensino desenvolvente e atividade de estudo. **Journal of Russian and East European Psychology**, vol. 41, nº. 4, July–August, 2003.

RESENDE, M. R. **Programa Observatório da Educação - O ensino e a aprendizagem da álgebra nos anos finais do ensino fundamental.** Projeto de pesquisa aprovado pela Capes, 2013.

RESENDE, M. R. Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na licenciatura. Tese (Doutorado em Educação Matemática) PUC/SP, 2007.

RIGON, J. A.; ASHABR, F. S. F.; MORETTI, V. D. Sobre o processo de humanização. In: MOURA, M. O. (Org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural.** Brasília: Liber Livro, 2010.

SÁ-SILVA, J. R.; ALMEIDA, C. D.; GUINDANI, J.F. Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. **Revista Brasileira de História & Ciências Sociais**, v.1, n.1, p.1-15, 2009.

SANTIAGO, E. **O capital**. Disponível em http://www.infoescola.com/livros/o-capital/. Acesso em 01 de nov. 2013.

SANTOS, A. C.; GATTI JR, D. Os caminhos da Educação Matemática brasileira por meio da análise do livro didático. **Cadernos de História da Educação** (UFU. Impresso), v. 8, p. 27-36, 2009.

SFORNI, Marta Sueli Faria. **Aprendizagem conceitual e organização do ensino: contribuições da teoria da atividade**. Araraquara: JM Editora, 2004.

SOUSA, M. C.; PANOSSIAN, M. L. CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino:** o percurso dos conceitos algébricos**.** Campinas: Mercado das Letras, 2014.

Talizina, N. F. **Manual de psicologia pedagógica**. Tradução de SOLOVIEVA, Y. V.; ROJAS, L. Q. México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí, 2000.

UBERABA. Secretaria Municipal de Educaçãoe Cultura. **Plano Decenal Municipal de Educação - Uberaba 2006-2015**. Uberaba, 2007. 152 p.

UBERABA. Secretaria Municipal de Educaçãoe Cultura**,** 2014.Disponível em:http://www.uberaba.mg.gov.br/portal/conteudo,32059. Acesso em:13abr. 2015.

UBERABA. **Indicadores Sociais 2009**. Disponível em: http://www.uberaba.mg.gov.br/portal/acervo/desenvolvimento_economico/arquivos/uberaba_em_dados/Edicao_2009/capitulo_03.pdf. Acesso em: 13 abr. 2015.

UBERABA. Secretaria Municipal de Educação e Cultura. Disponível em: http://www.uberaba.mg.gov.br/portal/conteudo,9173. Acesso em: 19 abr.2015.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Artur. F.; SHULTE, Alberto. P. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual,1995. p. 9-22.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores** (4ª ed.). São Paulo: Martins Fontes, 1991.

VYGOTSKY, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. 2ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamiento y habla**. Buenos Aires, 2007. Tradução de GONZÁLES, A.A

ANEXO A – Matriz Curricular do Município de Uberaba - Matemática para 8º ano

SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO E CULTURA

DEPARTAMENTO PEDAGÓGICO

MATRIZ CURRICULAR - MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

CONTEÚDO CURRICULAR: MATEMÁTICA **ANO: 8° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

EIXOS ESTRUTURANTES	OBJETOS DE CONHECIMENTO	DIREITOS DE APRENDIZAGEM	CONDIÇÕES DIDÁTICAS
EE1. Números e operações	OC1. Os conjuntos numéricos	EE1OC1DA1. Fatorar números naturais em produto de números primos.	- Promover a contextualização do conceito matemático que está sendo trabalhado, criando situações práticas, para o aluno compreender como fará uso daquele conhecimento nos contextos sociais onde se insere. - Propor, sistematicamente, situações cotidianas, envolvendo os conceitos matemáticos, ajudando o
		EE1OC1DA2. Calcular a raiz quadrada de quadrados perfeitos.	
		EE1OC1DA3. Identificar os números irracionais.	
		EE1OC1DA4. Identificar os números racionais com as dízimas periódicas.	
		EE1OC1DA5. Identificar as dízimas com os números irracionais.	
		EE1OC1DA6. Analisar as propriedades das operações com números reais.	
		EE1OC1DA7. Interpretar e representar notações científicas.	

		EE1OC1DA8. Calcular potências de base real e de expoentes inteiros.	aluno a perceber a utilidade do conhecimento para sua vida. Flexibilização para comprometimento auditivo: - Possibilitar a presença de um tradutor de LIBRAS na sala de aula. - Falar de frente para o aluno com deficiência auditiva, utilizando linguagem objetiva e clara. - Enfatizar a fala com gestos, figuras ou escritas. - Chamar a atenção do aluno, para resolução de situações-problema. - Utilizar jogos e desafios lúdicos, para aproximar os alunos das estruturas e dos conceitos a serem apreendidos.
		EE1OC1DA9. Operar com potências de base 10.	
	OC2. Números e operações	EE1OC2DA10. Compreender e resolver situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações e envolvendo números naturais, inteiros e racionais.	
		EE1OC2DA11. Identificar, em situações-problema, grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais, ou nem diretamente nem inversamente proporcionais.	
		EE1OC2DA12. Compreender e resolver situações-problema que incluam grandezas diretamente proporcionais, por meio de estratégias variadas, inclusive, por meio da regra de três.	
		EE1OC2DA13. Compreender e resolver situações-problema que abranjam o cálculo de juros simples; utilizar porcentagem para cálculo de descontos e de acréscimo simples, fazendo uso da calculadora.	
	OC3. Álgebra	EE1OC3DA14. Utilizar a linguagem algébrica para resolução de problemas.	
		EE1OC3DA15. Calcular o valor numérico de uma	

		expressão algébrica. (D30).	- Estimular os alunos a conhecerem e aplicarem as estratégias convencionais de resolução de determinadas proposições ou situações-problema, bem como a desenvolverem outras estratégias possíveis, para chegarem a um resultado correto. - Promover atividades permanentes que envolvam jogos e cálculos mentais e escritos. Flexibilização para comprometimento intelectual: - Garantir que, ao iniciar um novo conceito, as bases que o sustentam estejam apreendidas. - Possibilitar que o (a)
		EE1OC3DA16. Construir procedimentos, para efetuar operações com expressões algébricas, utilizando propriedades conhecidas.	
		EE1OC3DA17. Compreender e resolver situações-problema, envolvendo operações, como monômios e polinômios que envolvam conhecimentos de perímetro, de área e de volume.	
		EE1OC3DA18. Efetuar operações com monômios e polinômios.	
		EE1OC3DA19. Reconhecer e determinar o quadrado da soma ou diferença de dois termos.	
		EE1OC3DA20. Reconhecer e determinar o produto da soma pela diferença de dois termos.	
		EE1OC3DA21. Reconhecer e determinar o cubo da soma ou da diferença de dois termos;	
		EE1OC3DA22. Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras. (D32).	
		EE1OC3DA23. Obter expressões equivalentes a uma expressão algébrica, por meio de fatoração e de simplificação.	

		EE1OC3DA24. Calcular o Máximo Divisor Comum (MDC) e o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) de polinômios simples.	aluno(a) tenha mais tempo para elaborar os conceitos matemáticos. - Usar recursos pedagógicos variados, envolvendo jogos matemáticos ou tecnológicos. - Desenvolver projetos didáticos, envolvendo conteúdos diversos. - Promover aulas de revisão de conteúdos e de monitoria (realizadas por alunos avançados), como forma de intervenção, junto aos alunos com desempenho abaixo do esperado, e como forma de garantir bases estruturais para conceitos mais complexos. - Orientar os alunos para o uso de recursos tecnológicos, como a calculadora, o celular, o computador, que
		EE1OC3DA25. Identificar a raiz de uma equação do 1º grau.	
		EE1OC3DA26. Utilizar uma equação ou uma inequação do 1º grau, para expressar uma situação-problema. (D33).	
		EE1OC3DA27. Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do 1º grau. (D35).	
		EE1OC3DA28. Compreender e resolver problemas, por meio de um sistema de equações do 1º grau, construindo diferentes procedimentos e discutindo o significado das raízes encontradas, em confronto com a situação proposta.	
		EE1OC3DA29. Utilizar valores numéricos de expressões algébricas, para constatar a falsidade de igualdades ou de desigualdades.	
EE2. Espaço e forma	OC4. Polígonos, triângulos e quadriláteros	EE2OC4DA30. Representar diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras	

		tridimensionais e reconhecer a figura representada por diferentes perspectivas.	favoreçam uma melhor compreensão dos conteúdos. Flexibilização para comprometimento visual: - Descrever, oralmente, situações, contextos, instruções, resoluções, para o aluno com deficiência visual. - Usar material transcrito para o Braille. - Propor materiais, com contornos em alto-relevo, para o aluno tatear. - Usar recursos pedagógicos, como jogos devidamente adaptados para o aluno. - Trabalhar com atividades exploratórias e investigativas, para produzir escritas algébricas, em situações que
		EE2OC4DA31. Analisar, em poliedros, a posição relativa de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas e perpendiculares).	
		EE2OC4DA32. Explorar propriedades referentes às alturas e às medianas de um triângulo.	
		EE2OC4DA33. Compreender e resolver situações-problema que abranjam as propriedades dos quadriláteros.	
		EE2OC4DA34. Construir procedimentos, para calcular o número de diagonais de um polígono, pela observação de regularidades existentes entre o número de lados e o de diagonais.	
		EE2OC4DA35. Identificar as transformações de uma figura, obtidas pela sua translação, identificando características dessa transformação (em relação às medidas dos lados, dos ângulos e da superfície da figura).	

		EE2OC4DA36. Identificar ângulos congruentes, complementares e suplementares, em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais, reconhecendo propriedades e utilizando-as para resolver situações- problema.	envolvam generalização de propriedades, de incógnitas, de fórmulas, de relações numéricas e de padrões. - Explorar diversas situações-problema que permitam a tradução por equações, por inequações e por sistema de equação do 1º grau. - Usar programas em computadores, para observar conceitos, bem como para fixá-los, por meio de atividades on-line. - Elaborar bancos de questões a serem arquivados em pastas ou no computador, envolvendo conceitos já trabalhados, para os alunos, posteriormente, acessarem arquivos e resolverem atividades.
		EE2OC4DA37. Compreender e resolver situações-problema que incluam a obtenção da bissetriz de um ângulo e a construção de alguns ângulos (90º, 45º, 60º e 30º), fazendo uso de instrumentos, como régua, compasso e transferidor.	
		EE2OC4DA38. Compreender e resolver situações-problema que abranjam a obtenção da mediatriz de um segmento, de um segmento de reta paralela ou perpendicular a outro segmento de reta dada, fazendo uso de instrumentos, como régua, compasso, esquadro e transferidor.	
		EE2OC4DA39. Explorar a congruência de figuras planas, em situações-problema, a partir da análise de reflexões em retas, rotações e translações.	
		EE2OC4DA40. Determinar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.	
EE3. Grandezas e medidas	OC5. Medidas de área e de	EE3OC5DA41. Calcular a área de superfícies	

	escala	planas delimitadas por um paralelogramo, por um losango e por um trapézio, por meio da utilização de fórmulas.	- Utilizar, sempre, instrumentos, como compassos, transferidores e réguas, na resolução de atividades. - Utilizar instrumentos de medidas convencionais ou não convencionais, para explorar medidas de grandezas com os alunos. - Utilizar cartazes da Tábua de Pitágoras, em sala de aula, para que os alunos possam realizar consultas. - Trabalhar com planificação de figuras, para os alunos perceberem as propriedades das mesmas. - Usar sólidos geométricos em madeira, para os alunos conhecerem as propriedades dos mesmos.
		EE3OC5DA42. Construir procedimentos para medir grandezas que são determinadas pela relação de duas outras (como velocidade e densidade) e utilizá-los para resolver situações-problema.	
		EE3OC5DA43. Compreender e resolver situações-problema, utilizando noções de escala, e analisar plantas e mapas, identificando as escalas utilizadas.	
EE4. Tratamento da informação	OC6. População, frequência, amostra e médias	EE4OC6DA44. Utilizar diversas representações gráficas (barras, colunas, segmentos, setores e histogramas), para representar um conjunto de dados e vice-versa. (D37).	
		EE4OC6DA45. Compreender termos, como frequência, frequência relativa e amostra de uma população, para interpretar informações de uma pesquisa.	
		EE4OC6DA46. Interpretar e utilizar dados, representados em tabelas e/ou gráficos, para resolver situações-problema.	

		EE4OC6DA47. Compreender e resolver problemas que envolvam os tipos de médias trabalhadas.	- Promover torneios ou campeonatos, envolvendo cálculos escritos ou mentais, resolução de situações-problema, fatos fundamentais da multiplicação e da divisão, expressões numéricas, etc.
		EE4OC6DA48. Interessar-se em pesquisar, em buscar dados e estudos, em fontes diversas, como: Datafolha, Ipea, IBGE, Veja, etc.	

APÊNDICEA- Confronto entre os conteúdos propostos pelos PCN e a Matriz Curricular de Matemática para o Município de Uberaba – MG, 4º ciclo do Ensino Fundamental -

Eixo Temático	**PCN – Matemática – 4º ciclo**	**Referência na Matriz Curricular – Uberaba/MG – 8º ano**
Números e Operações	Constatação que existem situações-problema, em particular algumas vinculadas à Geometria e medidas, cujas soluções não são dadas por números racionais (caso do p, da 2, 3 etc.).	
	Identificação de um número irracional como um número de representação decimal infinita, e não-periódica, e localização de alguns deles na reta numérica, com régua e compasso.	EE1OC1DA3, EE1OC1DA5
	Análise, interpretação, formulação e resolução de situações problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais aproximados por racionais.	EE1OC1DA1, EE1OC1DA2, E1OC1DA4, EE1OC1DA7, EE1OC1DA8, EE1OC1DA9, EE1OC2DA10.
	Resolução de situações-problema de contagem, que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como a construção de diagramas, tabelas e esquemas sem a aplicação de fórmulas.	
	Construção de procedimentos para calcular o número de diagonais de um polígono pela observação de regularidades existentes entre o número de lados e o de diagonais.	EE2OC4DA33
	Identificação da natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (afim ou quadrática), expressando a relação existente por meio de uma sentença algébrica e representando-a no plano cartesiano.	EE1OC2DA11.
	Resolução de problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três.	EE1OC2DA12.

	Resolução de situações-problema que envolvem juros simples e alguns casos de juros compostos, construindo estratégias variadas, particularmente as que fazem uso de calculadora.	EE1OC2DA13.
	Tradução de situações-problema por equações ou inequações do primeiro grau, utilizando as propriedades da igualdade ou desigualdade, na construção de procedimentos para resolvê-las, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.	EE1OC3DA25. EE1OC3DA26.
	Resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações do primeiro grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-lo, inclusive o da representação das equações no plano cartesiano, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.	EE1OC3DA27. EE1OC3DA28.
	Construção de procedimentos para calcular o valor numérico e efetuar operações com expressões algébricas, utilizando as propriedades conhecidas.	EE1OC3DA14, EE1OC3DA15, EE1OC3DA16, EE1OC3DA29.
	Obtenção de expressões equivalentes a uma expressão algébrica por meio de fatorações e simplificações.	EE1OC3DA18, EE1OC3DA23.
	Resolução de situações-problema que podem ser resolvidas por uma equação do segundo grau cujas raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta.	
Espaço e Forma	Representação e interpretação do deslocamento de um ponto num plano cartesiano por um segmento de reta orientado.	
	Secções de figuras tridimensionais por um plano e análise das figuras obtidas.	
	Análise em poliedros da posição relativa de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas, perpendiculares).	EE2OC4DA31
	Representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais e reconhecimento da figura representada por diferentes vistas.	EE2OC4DA30

	Divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso.	
	Identificação de ângulos congruentes, complementares e suplementares em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais.	
	Estabelecimento da razão aproximada entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.	
	Determinação da soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.	EE2OC4DA40.
	Verificação da validade da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para os polígonos não-convexos.	EE2OC4DA40
	Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.	EE2OC4DA38, EE2OC4DA37.
	Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície).	EE2OC4DA35, EE2OC4DA39.
	Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.	EE2OC4DA39.
	Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso.	EE2OC4DA32
	Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro).	
	Verificações experimentais e aplicações do teorema de Tales.	EE2OC4DA36.
	Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras.	
Grandezas e Medidas	Resolução de situações-problema envolvendo grandezas (capacidade, tempo, massa, temperatura) e as respectivas unidades de medida, fazendo conversões adequadas para efetuar cálculos e expressar resultados.	EE1OC2DA12

	Cálculo da área de superfícies planas por meio da composição e decomposição de figuras e por aproximações.	
	Construção de procedimentos para o cálculo de áreas e perímetros de superfícies planas (limitadas por segmentos de reta e/ou arcos de circunferência).	
	Cálculo da área da superfície total de alguns sólidos geométricos (prismas e cilindros).	
	Cálculo do volume de alguns prismas retos e composições destes.	
	Análise das variações do perímetro e da área de um quadrado em relação à variação da medida do lado e construção dos gráficos cartesianos para representar essas interdependências.	
	Resolução de situações-problema envolvendo grandezas determinadas pela razão de duas outras (densidade e velocidade) ou pelo produto (energia elétrica: kWh).	EE3OC5DA42.
	Compreensão dos termos algarismo duvidoso, algarismo significativo e erro de medição, na utilização de instrumentos de medida.	
	Estabelecimento da relação entre a medida da diagonal e a medida do lado de um quadrado e a relação entre as medidas do perímetro e do diâmetro de um círculo.	EE2OC4DA33.
Tratamento da Informação	Leitura e interpretação de dados expressos em gráficos de colunas, de setores, histogramas e polígonos de frequência.	EE4OC6DA44.
	Organização de dados e construção de recursos visuais adequados, como gráficos (de colunas, de setores, histogramas e polígonos de frequências) para apresentar globalmente os dados, destacar aspectos relevantes, sintetizar informações e permitir a elaboração de inferências.	EE4OC6DA46.
	Compreensão de termos como frequência, frequência relativa, amostra de uma população para interpretar informações de uma pesquisa.	EE4OC6DA45.
	Distribuição das frequências de uma variável de uma pesquisa em classes de modo que resuma os dados com um grau de precisão razoável.	

	Obtenção das medidas de tendência central de uma pesquisa (média, moda e mediana), compreendendo seus significados para fazer inferências.	EE4OC6DA47.
	Construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão.	
	Elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas.	
ATITUDES	Predisposição para usar os conhecimentos matemáticos como recursos para interpretar, analisar e resolver problemas em contextos diversos.	
	Desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados.	--
	Predisposição para encontrar exemplos e contra-exemplos, formular hipóteses e comprová-la.	--
	Interesse em comparar diferentes métodos e processos na resolução de um problema, analisando semelhanças e diferenças entre eles e justificando-os.	--
	Interesse por utilizar as diferentes representações matemáticas que se adaptam com mais precisão e funcionalidade a cada situação-problema de maneira que facilite sua compreensão e análise.	--
	Compreensão da importância da estatística na atividade humana e de que ela pode induzir a erros de julgamento, pela manipulação de dados e pela apresentação incorreta das informações (ausência da frequência relativa, gráficos com escalas inadequadas).	--
	Valorização do trabalho coletivo, colaborando na interpretação de situações-problema, na elaboração de estratégias de resolução e na sua validação.	--
	Predisposição para analisar criticamente informações e opiniões veiculados pela mídia, suscetíveis de ser analisadas à luz dos conhecimentos matemáticos.	--
	Valorização do uso dos recursos tecnológicos, como instrumentos que podem auxiliar na realização de alguns trabalhos, sem anular o	--

	esforço da atividade compreensiva.	
	Interesse em dispor de critérios e registros pessoais para emitir um juízo de valor sobre o próprio desempenho, comparando-o com o dos professores, de modo que se aprimore.	--

Fonte: Elaboração da autora, com base nos PCN e Matrizes Curriculares de Uberaba.