UNIVERSIDADE DE UBERABA

ANA PAULA ARANTES LIMA MANZAN

A APROPRIAÇÃO DOS CONCEITOS DE FUNÇÃO AFIM E QUADRÁTICA POR ESTUDANTES DE CURSOS DE ENGENHARIA

UBERABA-MG
2014

ANA PAULA ARANTES LIMA MANZAN

A APROPRIAÇÃO DOS CONCEITOS DE FUNÇÃO AFIM E QUADRÁTICA POR ESTUDANTES DE CURSOS DE ENGENHARIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Uberaba, como requisito para obtenção do título de Mestre em Educação, conforme previsto no Regimento do Programa.

Linha de Pesquisa: Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo de ensino-aprendizagem

Orientadora: Profa. Dra. Marilene Ribeiro Resende

UBERABA-MG
2014

Catalogação elaborada pelo Setor de Referência da Biblioteca Central UNIUBE

Manzan, Ana Paula Arantes Lima.
M319a A apropriação dos conceitos de função afim e quadrática por estudantes de cursos de engenharia / Ana Paula Arantes Lima Manzan. – Uberaba, 2014.
158 f.: il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade de Uberaba. Programa de Mestrado em Educação, 2014.
Orientadora: Profª. Dra. Marilene Ribeiro Resende.

1. Funções (Matemática). 2. Educação superior. 3. Pesquisa qualitativa. 4. Educação. I. Universidade de Uberaba. Programa de Mestrado em Educação. II. Título.

CDD 515

Ana Paula Arantes Lima Manzan

A APROPRIAÇÃO DOS CONCEITOS DE FUNÇÃO AFIM E QUADRÁTICA POR ESTUDANTES DE CURSOS DE ENGENHARIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Uberaba, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientadora: Profa. Dra. Marilene Ribeiro Resende

Aprovada em 28/08/2014

BANCA EXAMINADORA

M RResende

Profª Drª Marilene Ribeiro Resende (Orientadora)
UNIUBE - Universidade de Uberaba

Paulo

Prof. Dr. Paulo César Oliveira
UFSCar – Universidade Federal de São Carlos

AM EBortolanza

Profª Drª Ana Maria Esteves Bortolanza
UNIUBE - Universidade de Uberaba

DEDICATÓRIA

"A mente que se abre a uma nova idéia
jamais voltará ao seu tamanho original."
Albert Einstein

Dedico primeiramente este trabalho a Deus, pois nele encontrei coragem e forças para enfrentar as dificuldades encontradas ao longo deste caminho.

Ao meu esposo José Ricardo que sempre me apoiou e me incentivou em todos os momentos, mostrando seu amor, sua dedicação e sua compreensão. Recordo de uma das frases que me dizia: "você vai conseguir, pois é mais forte que tudo o que está à sua volta e estou contigo para o que der e vier".

Aos meus pais Marlene e Vicente que, ao longo de minha vida, me ensinaram a ter fé, amor, ser uma pessoa de bem, e sempre persistir em qualquer situação a ser enfrentada, me apoiando ao longo destes dois anos de luta.

À minha irmã Ana Virginia que me socorreu nos momentos de maior dificuldade durante a execução desta dissertação, me incentivando a continuar e a chegar ao fim dos estudos.

AGRADECIMENTOS

“Cada pessoa que passa em nossa vida, passa sozinha, é porque cada pessoa é única e nenhuma substitui a outra! Cada pessoa que passa em nossa vida passa sozinha e não nos deixa só porque deixa um pouco de si e leva um pouquinho de nós. Essa é a mais bela responsabilidade da vida e a prova de que as pessoas não se encontram por acaso.”
Charles Chaplin

Tenho muito a agradecer a várias pessoas que ao longo destes dois anos me apoiaram e me incentivaram a continuar. Sempre me perguntavam: "o que posso fazer para te ajudar?" E foram muitas as pessoas que me ajudaram, agradeço a todos os meus amigos e familiares que sempre estiveram ao meu lado.

Primeiro agradeço à minha orientadora **Marilene Ribeiro Resende**, que me aceitou como orientanda e foi muito, mas muito compreensiva comigo durante estes dois anos. Foram muitas as dificuldades que passei e ela me apoiou em minhas escolhas me incentivando a cada dia.

Aos meus amigos de jornada **Antônio José de Almeida Junior** e **Luiz Pessoa Vicente Neto**, que sempre me acudiam em todos os momentos. São poucas as pessoas que podemos chamar de amigos, e eu posso dizer: Obrigada meus amigos.

Ao **Leandro Martins da Silva**, outro grande amigo que me orientava em todos os momentos e a quem ligava para me dar uma luz no final do túnel, sempre dizendo: "Ana, você consegue.É uma pessoa muito especial, não se deixe abater, em que posso te ajudar?"

A **Márcia Fernandes de Araújo**, que, nos momentos de mais desespero para terminar a dissertação, me ofereceu um ombro amigo e disse: "Eu te ajudo. Envie-me a dissertação e pode deixar comigo que irei colocar nas normas da ABNT". São nestes momentos de sofrimento que encontramos os verdadeiros amigos.

A todos os amigos do **Centro Espírita Emmanuel**, que compreenderam ao longo destes dois anos as ausências, a falta de tempo, o cansaço e demonstraram um enorme companheirismo. E, em especial, às minhas crianças da Evangelização Valentino Chavaglia e Mocidade Espírita Antônio Scandiuzzi Filho, só tenho uma coisa a dizer: Obrigada meus filhos pela ajuda de vocês e pelo amor demonstrado.

A todos da minha **família** que sempre estiveram ao meu lado e torceram pelo meu sucesso.

A todos as pessoas que de forma direta ou indireta me ajudaram ao longo destes dois anos para o surgimento deste trabalho.

Ao professores Dr Adriano Dawison de Lima, Dr Paulo César Oliveira e Dra Ana Maria Bortolanza por contribuírem de forma significativa para a elaboração desse trabalho.

Obrigado Senhor por mais uma vitória em minha vida e por suas bênçãos derramadas sobre mim.

RESUMO

Esta investigação se insere na Linha de Pesquisa: Desenvolvimento Profissional e Trabalho Docente e toma como objeto de estudo a apropriação dos conceitos de função afim e de função quadrática. O conceito de função é um dos conceitos fundamentais da matemática, pois traduz duas características básicas dos fenômenos naturais –a interdependência e a fluência características marcantes da r*ealidade* na qual a humanidade se insere. Está presente em disciplinas dos cursos de engenharias,*locus* do estudo, especialmente na disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Trata-se de um estudo exploratório, de abordagem qualitativa, que servirá de referência para outros trabalhos que estão sendo realizados no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação da UNIUBE. Para sua realização utilizaram-se os procedimentos metodológicos da engenharia didática como ferramenta, pois permitem observar e explorar os objetos matemáticos e a relação entre a teoria e o campo experimental da prática educativa. Foi realizado com um grupo de 12 alunos, divididos em duplas, escolhidos aleatoriamente, de uma turma de estudantes de engenharia, que já haviam cursado uma disciplina em que esses conceitos foram abordados, numa instituição de ensino superior privada da região do Triângulo Mineiro – MG. Utilizou-se uma sequência didática, contendo 10 situações-problema, cinco envolvendo a função afim e cinco, a função quadrática. Toma como referencial teórico para tratar a formação de conceitos, autores da teoria histórico-cultural, especialmente, Vygotsky e Davydov, e, para tratar o conceito de função, Caraça, Iezzi e Murakami. Foi possível constatar que esses alunos ainda não têm formalizado o conceito de função, demonstrando em algumas tarefas um pensamento empírico e não atingindo, portanto, o pensamento teórico, pois esse exige o movimento da análise para a síntese e da síntese para a análise. Em relação ao conceito de função afim, há indícios de que os participantes apresentam *um pensamento por complexos* ou *pseudoconceito,* porque os elementos constituintes do conceito, inclusive as suas representações, parecem não atingir um nível de "relação geral" e uma "abstração substantiva". Em relação ao conceito de função quadrática, há indícios de que não há nexos que unam os elementos caracterizadores do conceito, o que permite afirmar que não se trata de um conceito propriamente dito, mas de *amontoados sincréticos*, um agrupamento de objetos de forma desorganizada.O uso do *software Winplot* permitiu observar uma contradição – ao mesmo tempo em que facilita a visualização de elementos característicos das funções estudadas, permitindo a realização de determinadas tarefas, também obscurece a formação do pensamento teórico a respeito desses mesmos elementos. A sua utilização conduz a uma prevalência da representação geométrica sobre a algébrica.

Palavras-chaves:. Função afim e quadrática. Formação de conceitos. Engenharia Didática

ABSTRACT

This research falls within the Research Line: Professional Development and Teaching Work and takes as its object of study the appropriation of the concepts of linear function and quadratic function. The concept of function is one of the fundamental concepts because mathematics, as reflectes two basic characteristics of natural phenomena - the interdependence and fluency, salient features of reality in which humanity is a part. It is present in the disciplines of engineering courses, locus of study, especially in the discipline Differential and Integral Calculus. This is an exploratory study, a qualitative approach, which will serve as a reference for other works within the Pos-Graduation Program in Education - UNIUBE. For its realization they used the methodological procedures of didactic engineering as a tool, as they allow to observe and explore mathematical objects and the relationship between theory and the experimental field of educational practice. It was conducted with a group of 12 students, divided into pairs randomly chosen from a group of engineering students, who had already taken a course in which these concepts had been addressed, a private institution of higher education in the region -Triângulo Mineiro - MG . We used a didactic sequence, containing 10 problem- situations involving five linear functions and five of quadratic functions. It takes as its theoretical framework to treat the formation of concepts, authors of historical-cultural theory, especially Vygotsky and Davydov, and to treat the concept of function, Caraça, Iezzi and Murakami. It was found that these students have not formalized yet the concept of function, demonstrating in some tasks on an empirical thought and therefore not reaching the theoretical thinking, because this requires moving from analysis to synthesis and synthesis for analysis. Regarding the concept of linear function, there is evidence that the participants have a *complex thinking* or *misconception,* because the elements of the concept, including its representations, does not seem to reach a level of "general relationship" and a "substantive abstraction".Regarding to the concept of quadratic function, there is evidence that there is not nexus uniting the characteristic elements of the concept, which allows us to affirm that it is not a concept itself, but syncretic heaps, a grouping of objects haphazardly . The use of software Winplot allowed to observe a contradiction at - the same time that it facilitates the visualization of characteristic functions of the studied elements, allowing the performance of certain tasks, it also obscures the formation of theoretical thinking about these same elements.

Keywords:linear function and quadratic, conception formation, didactic engineering.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADRO

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem de matemática têm sido alvo de muitos estudos nas últimas décadas. De modo geral, existem pesquisas focadas nos diversos níveis de ensino, seja nos anos iniciais da Educação Infantil, no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio. Não obstante, a educação superior tem também recebido atenção crescente por parte dos pesquisadores em educação. Esse fato é facilmente justificado, quando se leva em consideração que a maioria dos currículos dos cursos superiores possui disciplinas da área de matemática. Como ciência básica, a matemática possui grande importância, tanto pela sua aplicabilidade na solução de situações cotidianas, como pela sua importância na fundamentação e sustentação das várias tecnologias existentes, além de propiciar o desenvolvimento de capacidades psíquicas superiores.

Nesse sentido, nos currículos de cursos da área tecnológica, principalmente nos de engenharias, as disciplinas do campo da matemática têm um grande peso. Há casos de cursos em que há quatro disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral[1], uma disciplina de Cálculo Numérico, uma disciplina de Álgebra Linear, além de disciplinas de Estatística Básica e Experimental.

Por outro lado, o desenvolvimento econômico do país tem criado ao longo dos últimos anos demandas em diversas áreas profissionais. A área das engenharias, que, na década de 80, oferecia poucas oportunidades aos seus profissionais, sofre agora com a falta de engenheiros em todos os setores. O déficit é grande e, se o país continuar no ritmo de crescimento em que está, a previsão é que faltarão engenheiros para garantir a concretização desse crescimento (FACCINA, 2011).

Ainda que consideremos as demandas do mercado e que concordemos com Faccina (2011) que o país precisa de formar mais engenheiros para garantir o seu crescimento e desenvolvimento, não defendemos que essa formação deva estar voltada somente para o mercado. A formação desse profissional deve visar à constituição do homem pleno num processo de humanização. É nesse sentido que percebemos a importância do ensino da matemática na educação escolar e na formação de profissionais.

Para atender a essa demanda, as Instituições de Ensino Superior têm procurado aumentar a oferta de vagas em seus cursos. Uma iniciativa mais ousada é a oferta de cursos

---

[1]Ao longo do texto estaremos nos referindo a expressão "Cálculo Diferencial e Integral" apenas como Cálculo.

de engenharia na modalidade de Educação a Distância – EAD que, nos dias atuais, é feita por apenas algumas Instituições nos estados de Goiás, Minas Gerais, Pará, São Paulo, Rio de Janeiro e Santa Catarina e no Distrito Federal, sendo que cada uma destas instituições possuem vários pólos presenciais credenciados, espalhados pelo país.

O aumento da oferta de vagas seja nos cursos presenciais, bem como a opção de cursos de engenharia na modalidade de Educação a Distância – EAD, tem sido alternativas para o atendimento à demanda por novos engenheiros. Contudo, ingressar em um curso de engenharia não significa ter o diploma garantido em 5 ou 6 anos. A falta de conhecimentos básicos do ensino fundamental e do ensino médio faz com que os estudantes dos cursos de engenharia vejam nas disciplinas, que na maioria são da área de exatas, um grande obstáculo durante o curso (CAVASOTTO, 2010). Essa dificuldade prolonga a permanência de muitos estudantes nesses cursos e também provoca um grande número de desistências. Um dos grandes gargalos é a disciplina Cálculo que é ofertada logo nas séries iniciais dos cursos de engenharia.

A dificuldade na disciplina de Cálculo não é algo recente. Basta perguntar a qualquer engenheiro que se formou há 5, 10, 20 ou 30 anos que ele confirmará o medo dos estudantes em relação a essa disciplina (LACHINI, 2001). Na verdade, a grande maioria dos cursos de engenharia divide essa disciplina em quatro etapas, denominadas: Cálculo I, Cálculo II, Cálculo III e Cálculo IV.

Nesse sentido, mecanismos que venham a contribuir para a aprendizagem dos estudantes tornam-se extremamente importantes e necessários a estes cursos (ROCHA, 2010).

Segundo Kampff, Machado e Cavedini (2004, p. 2):

> É necessário repensar o ensino e a aprendizagem, colocando-se numa postura de professor inovador, criando situações significativas e diferenciadas, cabendo propiciar diferentes situações “problemas” ao educando. O aluno precisa ser motivado a envolver-se ativamente nesse processo, construindo o seu conhecimento a partir de múltiplas interações. O professor de matemática deve organizar um trabalho estruturado através de atividades que propiciem o desenvolvimento da exploração informal e investigação reflexiva e que não privem os alunos nas suas iniciativas e controle da situação.

No contexto das idéias desses autores, de criação de situações de ensino e aprendizagem que sejam significativas e inovadoras, colocam-se as diversas mídias às quaiso aluno tem acesso hoje: mídia digital, mídia impressa e mídia eletrônica. Podemos encontrar vários *softwares* para o ensino de matemática disponíveis na internet. Contudo, a mídia por si só não garante aprendizagem por parte do aluno. É necessária a intervenção do professor para que a mídia contribua no processo de aprendizagem, ou seja, o professor assume o papel de orientador e organizador neste processo educativo.

Assim o professor tem um papel fundamental para a aprendizagem do aluno, pois é através dessas situações de ensino que o aluno passará por um processo de formação dos conceitos científicos.. A formação do pensamento teórico contribuirá para o desenvolvimento das capacidades de análise e síntese, de generalizar e abstrair, promovendo o desenvolvimento pleno do ser humano.

Discussões acerca do ensino e aprendizagem de funções em cursos superiores, a temática desta investigação, não tem recebido muita atenção no âmbito das pesquisas em Educação Matemática. Em relação aos cursos de engenharia, as pesquisas estão voltadas para a teoria aplicada à prática.As investigações realizadas sobre essa temática apresentam discussões, em sua maioria, voltadas para o ensino fundamental e médio ou para a formação de professores.

Realizamos uma pesquisa no *Banco de teses da Capes* com base em alguns descritores: função quadrática, função afim, matemática básica e engenharia, cálculo e matemática básica, cálculo e funções e cálculo e o ensino de função, considerando as produções produzidos a partir de 2000. Encontramos algumas produções cientificas, dentre elas, as que apresentamos a seguir; escolhidas por apresentarem maior relação com o objeto desta pesquisa.

No estudo de Pereira *et al.* (2013), as autoras abordam uma experiência de um curso de Pré-Cálculo na Pontifícia Universidade Católica. Nesta , as autoras desenvolveram um trabalho de ensino de conteúdos de matemática básica e de funções para estudantes de um curso de engenharia, antes da disciplina de Cálculo I. O curso de Pré-Cálculo foi desenvolvido no Ambiente Virtual de Aprendizagem, chamado *Moodle*, utilizando recursos pedagógicos como vídeos, objetos de aprendizagem e apostilas complementares. Durante a experiência, foi constatado que a grande dificuldade dos estudantes na disciplina Cálculo I deve-se muito mais a deficiências em conceitos de Matemática Básica do que do próprio Cálculo. À luz da discussão, o estudo concluiu que o curso de Pré-Cálculo é de fundamental importância para maior sucesso dos estudantes na disciplina de Cálculo I.

Também pode-se encontrar na pesquisa de Alves (2010), uma discussão bastante rica acerca do uso de recursos computacionais no ensino de funções, limite e continuidade em uma disciplina de Introdução ao Cálculo. Nessa pesquisa, foi ofertada uma disciplina de Introdução ao Cálculo apenas para estudantes em dependência do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto. A abordagem da disciplina foi diferenciada, de maneira que das 60h previstas para a disciplina, 40h se deram de forma expositiva em sala de aula comum, e as outras 20h se deram por meio de atividades no laboratório de informática, tomando-se o *software Geogebra*. A questão norteadora da pesquisa girava em torno da utilização de tecnologias informacionais e comunicacionais que podem contribuir para ou redirecionar o ensino de Funções, Limites e Continuidade em disciplinas de Introdução ao Cálculo. As vantagens elencadas com essa proposta são a possibilidade de visualização de propriedades, abertura para conjecturas, ambiente dinâmico, abordagem intuitiva e mudança de postura dos estudantes diante do processo ensino-aprendizagem. Ao final, constatou-se uma melhora significativa no índice de aprovação dos estudantes.

Já o trabalho de Ferruzzi e Almeida (2013) abordou a utilização da modelagem matemática no ensino de matemática em cursos de engenharia. Nesta pesquisa, a metodologia aplicada no ensino de disciplinas de matemática correspondeu à aplicação de problemas da área de engenharia que envolvem conceitos variados de matemática em suas soluções. Os grupos foram estimulados a buscar as soluções para os problemas, apresentando-os final dos trabalhos. Essa pesquisa revelou que o uso da modelagem matemática permitiu o desenvolvimento de habilidades e conhecimentos que vão além do esperado em termos de compreensão de conteúdos matemáticos. Analisando por uma perspectiva mais direta, o principal benefício dessa abordagem deu-se com a grande motivação por parte dos estudantes em pesquisar, buscar e aprender.

Outra pesquisa a respeito do ensino de matemática para cursos de engenharia é a apresentada por Morais e Laudares (2002). Foi realizada com professores de conteúdos de matemática do curso de Engenharia em Eletrônica da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC – Minas). A pesquisa consistiu em investigar as visões dos professores acerca do ensino da matemática nos cursos de engenharia, incluindo as dificuldades, a importância, a relação com as demais disciplinas e a contribuição que ela desempenha na formação do engenheiro. Nesse sentido, observaram a importância de que os conteúdos sejam abordados de uma maneira mais relacionada com as disciplinas técnicas do que focados na quantidade de assuntos.O ideal é que o estudante compreenda conceitos fundamentais e que, a partir deles, tenha habilidades para buscar aprendizagem de novos conceitos.

No contexto dessa problemática da forte presença da matemática nos cursos de engenharia, das dificuldades encontradas pelos alunos para alcançar a aprendizagem, das pesquisas realizadas na área e das possibilidades apresentadas pelas investigações já realizadas, e, considerando que o conceito de função é primordial para a aprendizagem do aluno no estudo das disciplinas de Cálculo e para outras disciplinas que compõem o currículo dos cursos de engenharias, a pergunta norteadora desta investigação é: "Qual é a apropriação dos alunos dos conceitos de função afim e quadrática, após já terem sido estudados no Ensino Médio e revisados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1?".

Constitui também justificativa para a pesquisa, o nosso interesse pela problemática apresentada, como professora de matemática nos cursos de engenharias há seis anos. Durante essa experiência, foi possível constatar muitas das dificuldades que têm sido apontadas nas disciplinas de Cálculo, em decorrência da falta de conceitos fundamentais trabalhados desde a educação básica. Essa experiência, aliada aos estudos realizados no Mestrado em Educação, motivaram-nos a nos debruçarmos sobre a temática do ensino de matemática nesses cursos, mais especificamente sobre a compreensão da apropriação dos conceitos de função afim e de função quadrática pelos estudantes em início de curso.

Assim, o presente trabalho buscou analisar como o aluno de cursos de engenharias que já estudou as funções afim e quadrática se apropriou desses conceitos, no movimento do geral/essencial para o particular e, desse, para o geral. Teve como objetivos específicos: investigar como o uso de recursos computacionais, como o *software Winplot*, contribui para a identificação dos elementos caracterizadores dos conceitos de função afim e função quadrática; buscar indícios da apropriação dos conceitos das funções afim e quadrática pelos alunos de cursos de Engenharia; verificar como os alunos de cursos de engenharia trabalham com as representações algébrica e geométrica dessas funções; levantar as dificuldades relacionadas a esses conteúdos que ainda permanecem.

Para responder a questão norteadora, elaboramos dez atividades que foram estruturadas de forma a orientar os alunos na utilização dos comandos do software *Winplot*, aliando conceitos básicos e aplicações relacionadas ao conteúdo.

O *Winplot* é um software de computação gráfica destinado ao ensino de funções reais em uma e em duas variáveis.Como tecnologia de apoio ao ensino de matemática tem sido amplamente utilizado por professores, além de ser objeto de diversas pesquisas. Suas possibilidades pedagógicas têm sido bastante destacadas pelos pesquisadores. Trata-se de um recurso didático interativo, que, munido de orientações didáticas do professor, é capaz de tornar-se bastante interessante aos olhos do estudante.

A pesquisa foi realizada no 1ª semestre de 2013 com uma turma de 1º período de cursos de engenharia numa instituição de ensino superior em Uberaba – MG. A turma foi escolhida pelo próprio professor da disciplina, de acordo com a sua disponibilidade de carga horária.Esse professor do curso de Engenharia na modalidade presencial se mostrou muito acessível e disposto a colaborar conosco,possibilitando-nos três aulas para a aplicação as atividades aos alunos.

O trabalho está estruturado em cinco capítulos:

No capítulo I,apresentamos os fundamentos teóricos da investigação. Procuramos, inicialmente, situar o conceito de função desde suas origens até sua formalização, apoiando-nos em Bento de Jesus Caraça, professor português, que viveu no século passado. Caraça inicia sua obra *Conceitos Fundamentais da Matemática*, explicando que a Ciência pode ser apresentada como algo harmonioso, como fazem os livros, ou pode ser apresentada no seu processo histórico de construção, no qual estão presentes as dúvidas, os erros, as contradições. O autor faz a opção pela segunda, por esse motivo o escolhemos. Esse referencial é o que nos parece ser mais coerente com o referencial teórico que adotamos para discutir o ensino e a aprendizagem – a perspectiva histórico cultural. Trazemos alguns pressupostos importantes para a compreensão dessa abordagem: o desenvolvimento das funções psíquicas superiores; a categoria trabalho como constituinte do processo de humanização; o conceito de atividade e a sua relação com a educação e, finalmente, a formação do pensamento teórico, objetivo dos processos de ensino e aprendizagem, de acordo com Vigotski.

No capítulo II, apresentamos a metodologia, os procedimentos metodológicos e as etapas percorridas na construção e no desenvolvimento da sequência didática, envolvendo as funções afim e quadrática, foco do nosso estudo.

No capítulo III, apresentamos os resultados coletados durante o experimento didático, relacionados à função afim. Foram analisados os registros das atividades realizadas pelos alunos em relação ao material impresso e o enviado por e-mail, realizado com a ajuda do software *Winplot,* além das gravações em áudio de cinco atividades.

Os dados coletados durante o experimento didático relacionados à função quadrática foram analisados no capítulo IV, a partir do material impresso e do enviado por *e-mail*, realizado com a ajuda do software Winplot, além das gravações em áudio de cinco atividades.

Portanto é com base nas dificuldades demonstradas pelos alunos durante as aulas que ministro na disciplina de Cálculo que esse trabalho é proposto. As maiores dificuldades demonstradas são a compreensão do conceito de função, em particular afim e quadrática. Para iniciarmos o primeiro capítulo dessa dissertação, iremos enforcar o conceito de função e a formação do pensamento teórico por parte dos estudantes.

CAPÍTULO 1 – O CONCEITO DE FUNÇÃO: DAS ORIGENS À FORMALIZAÇÃO

Como estamos abordando um conceito fundamental da matemática, o conceito de função, neste capítulo, procuramos, inicialmente, situá-lo dentro do estudo matemático das leis naturais de forma dialética, tomando como referência Bento de Jesus Caraça.Esse autor é um clássico e influenciou diversos pesquisadores e autores no campo da Educação Matemática.

O autor inicia sua obra *Conceitos Fundamentais da Matemática*, explicando que a Ciência pode ser apresentada como algo harmonioso, como fazem os livros, ou pode ser apresentada no seu processo histórico de construção, no qual estão presentes as dúvidas, os erros, as contradições. O autor faz a opção pela segunda abordagem, uma perspectiva dialética, por esse motivo o escolhemos. Esse referencial é o que nos parece ser mais coerente com o referencial teórico que adotamos para discutir o ensino e a aprendizagem – a abordagem histórico-cultural. Em seguida, trazemos os conceitos de função afim e de função quadrática, foco de nosso estudo, com base em autores tradicionais no ensino de matemática no Brasil.

1.1 O Conceito de Função: a abordagem dialética de Caraça

A partir de experiências e observações, ao longo da história, o homem foi realizando estudos dos fenômenos que o cercam. O acúmulo dos resultados desses estudos sistematizados e validados de diferentes formas ao longo dos séculos é denominado Ciência. Desse modo, pode-se afirmar que a Ciência tem por objetivo “a formação de um quadro ordenado e explicativo dos fenômenos naturais – fenômenos do mundo físico e do mundo humano, individual e social”. (CARAÇA, 1984, p. 107).

O quadro ordenado que tenha por caráter a explicação dos fenômenos, segundo o autor, atende a duas exigências principais: 1) A exigência de compatibilidade, isto é, não se pode aceitar desacordos, é “o princípio de acordo da razão consigo própria ” (CARAÇA, 1984, p. 52). No caso da Matemática, o autor entende que é preciso haver compatibilidade lógica entre os seres de que trata uma teoria e as afirmações que se fazem acerca deles. 2) A exigência de acordo com a realidade, ou seja, o homem ao buscar conhecer e dominar o meio que o cerca, não apenas tenta explicar os fenômenos, como também fazer previsões. Podemos estabelecer modelos que não são absolutos e imutáveis:

> A Ciência não tem, nem poderia ter, como objetivo descrever a realidade tal como ela é. Aquilo a que ela aspira é a construir quadros racionais de interpretação e previsão; a legitimidade de tais quadros dura enquanto durar o seu acordo com os resultados da observação e da experimentação. (CARAÇA, 1984, p. 108).

Logo, a partir do momento em que o quadro ordenado não consegue representar aquele fenômeno ou conjunto de fenômenos, ele deixa de ser relevante e diante disso, novos quadros são criados. Desse modo a Ciência se constrói e se reconstrói a partir de novos achados, de novas explicações e de novas reflexões.

Dentro deste contexto, a *realidade*, que o homem procura compreender, explicar e dominar, surge, segundo Caraça (1984), com duas características essenciais: a *interdependência* e a *fluência*. A *interdependência* diz respeito à relação que existe entre as coisas e os seres que estão no mundo. É facilmente confirmada em exemplos desde os mais simples, até os mais complexos. Cada um tem a sua própria razão de existir, mas por si só não conseguiria se manter dentro dessa *realidade*.

Já a *fluência* mostra que o mundo é sempre um vir a ser: tudo muda, tudo se transforma. Citando Heráclito de Efeso, Caraça afirma que tudo flui, tudo devém e explica: "Porque há um princípio universal de luta, de tensão de contrários, que a todo o momento rompe o equilíbrio para criar um equilíbrio novo" (CARAÇA, 1984, p. 68). Filosoficamente, o *devir* é o fluxo permanente, movimento ininterrupto, atuante como uma lei geral do universo, que desenvolve, cria e transforma as realidades existentes.

Mesmo considerando casos aparentemente mais estáveis, é possível listar uma quantidade de exemplos onde há mudança de condições. Por exemplo, o caso de montanhas que podem desaparecer com algum vulcão, o caso de rochas que, com a ação contínua da água, mudam suas formas dentro de alguns anos.

Continuando a discussão sobre *fluência* e *interdependência* e o intuito de estudar os fenômenos naturais,Caraça apresenta mais uma definição – a de isolado. Entende-se por *isolado* um recorte ou seção da *realidade*. Tal recorte não ocorre de maneira exata, mas deve ser feito a partir do bom senso do pesquisador. Ademais, o conceito de isolado pode sofrer variações dependendo do meio que o cerca e da profundidade do que se observa. O isolado pode ser encontrado em níveis diferentes, sendo que um pode ser constituído de outro. De maneira mais abrangente, a recomposição dum certo compartilhamento da *realidade* necessita da contínua construção em *cadeias*, e a cada elo da cadeia corresponde um *nível* de *isolado*.

Nessa lógica da história e conceituação da ciência, é importante abordar a noção de qualidade. Considerando dois conjuntos *A e B* de algum isolado, podem existir entre eles as relações de interdependência $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$. No caso de *A e B* serem duas espécies de animais, e *B* se alimentar de *A*, a relação $A \rightarrow B$ implica para o consequente *B* uma fonte de conservação.Já o sentido oposto implica para o consequente A, uma fonte de destruição. Quando os dois sentidos da relação têm o mesmo significado, classificamos esta relação como simétrica. Finalmente para os componentes *A, B, ... L*, de um isolado, o conjunto de todas as relações do tipo $A \rightarrow B,..., A \rightarrow L$ é denominado como qualidades de *A* em relação a *B, ..., L*. Dentre as relações simétricas podemos citar lei de atração dos corpos. (CARAÇA, 1984)

Há qualidades que não admitem graus diferentes de intensidade. Caraça (1984) cita o exemplo de duas circunferências, onde uma não pode ser mais circular do que a outra. Por outro lado, há qualidades que admitem as diferenças de intensidade. Ainda no caso das circunferências, podemos considerar as circunferências *A, B e C*, onde o raio de *A* é maior que o raio de *B*, e onde o raio de *B* é maior que o raio de *C*. Podemos afirmar que a área de *A* é maior que á área de *B* e também que a área de *B* é maior que a área de *C*. Por *transitividade*, a área de *A* é maior que a área de *C*. Consideremos um líquido que está recebendo calor:a qualidade *temperatura* admite vários níveis de intensidade. Nessas transições de intensidades do conceito de qualidade, surge o conceito de quantidade. E assim, Caraça (1984, p. 115) define *"quantidade* como atributo de *qualidade*." É importante alertar que a quantidade vem à tona na maioria das vezes em situações que empregam a medida. Contudo não se deve exigir a possibilidade de medir para falar de quantidade.

Em função da dinâmica do tempo, um isolado pode ser interpretado como o mesmo após várias evoluções advindas das qualidades que vão surgindo, as quais podem ser consideradas fases de evolução. Por outro lado, dependendo do olhar do observador, bem como de suas necessidades, pode-se considerar que um determinado isolado já não é mais o mesmo, mas um novo isolado. Diante de tal afirmação, os conceitos de quantidade e qualidade apresentam relação íntima quando várias qualidades novas aparecem em um isolado. Caraça (1984) aborda a questão da queda livre de um corpo no isolado Terra-pedra. No início da trajetória, a quantidade velocidade é crescente, mas a partir de certo ponto a quantidade de resistência do ar age sobre o corpo de tal modo que, em determinado instante, a velocidade deixa de aumentar e se estabiliza. É a qualidade *resistência do ar* alterando a qualidade *movimento acelerado do corpo* para *movimento uniforme do corpo*. O ponto de alteração é denominado como ponto crítico.

O trabalho do cientista consiste em observar e descrever fenômenos de maneira que a ordenação dos resultados possibilite a montagem de quadros explicativos. A partir disto, é possível verificar se tais fenômenos apresentam regularidade,em outras palavras, avaliar se determinado fenômeno tem comportamento idêntico. Assim, denomina-se por *lei*, toda a regularidade na evolução de um isolado. Essas regularidades são fundamentais na tarefa do homem de dominar a natureza. É só a partir disto, que é possível realizar previsões acerca de determinados fenômenos e beneficiar-se delas. As leis podem ser classificadas em quantitativas, qualitativas ou quantitativo-qualitativas.

Ao longo da história da ciência, várias explicações errôneas foram tomadas como leis. Caraça (1984, p. 124) aponta alguns exemplos como a explicação de queda dos corpos feita por Aristóteles e a teoria física que considera a iluminação como sendo uma transferência de um corpo luminoso para um corpo transparente. Nesse sentido, observa-se o risco de apontar leis para fenômenos sem estudá-los o suficiente para se obter informações precisas e confiáveis. Este erro é denominado como verbalismo, pois uma inferência é feita sem a devida observação. E assim, pode-se tirar como lição, o perigo de abuso da explicação quantitativa ou, em sentido oposto, o abuso da explicação qualitativa.

Nessa busca de explicar os fenômenos e estabelecer "*leis*" quantitativas para expressá-los, considerando a *interdependência* e a *fluência* a que o mundo está submetido, surgem ferramentas matemáticas.Essa ferramenta é o conceito de função cuja essência é a correspondência entre dois conjuntos.

Para representá-la simbolicamente, faz-se necessário estabelecer o conceito de variável:

> Seja (*E*) um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex.: *x.A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto* (E), *chamamos variável*.Quando dizemos, por exemplo: seja (E) o conjunto dos números reais do intervalo (0, 1), e seja *x* a sua *variável*, que queremos significar? Que o símbolo *x*, sem coincidir *individualmente* com nenhum dos números reais desse intervalo, é susceptível de os representar a todos; é, afinal, o símbolo da vida *colectiva* do conjunto, vida essas que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, *mas não se reduz a ela*. (CARAÇA, 1984, p.127,grifos do autor).

Assim a variável, assume segundo o autor, um caráter contraditório– ela é e não é cada um dos elementos dos conjuntos. O que define a substância da variável é o conjunto ao qual ela pertence, isto é, o seu domínio. Por exemplo: se *x* pertence ao conjunto dos números reais a sua substância é ser numero real.

Quando dois conjuntos estão em correspondência podemos identificar dois tipos de variáveis: a variável antecedente da correspondência, chamada de variável independente, e a variável consequente da correspondência, chamada de variável dependente. Deste modo Caraça (1984, p. 129) apresenta a seguinte definição de função:

> *Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se*
>
> $$y = f(x)$$
>
> *se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido* $x \rightarrow y$. *A x chama-se variável independente, a y variável dependente.*

Segundo o autor, a função pode ser representada por uma expressão analítica, que contém uma lei matemática, realizando uma correspondência entre as duas variáveis e expressando a relação existente entre elas. É uma igualdade que associa a cada valor *a* de x um valor *b* de y. Entretanto, é importante ressaltar que a função não se confunde com essa lei analítica, pois ela pode ser representada de outras formas. Uma delas é a representação geométrica, ou seja, por meio de um conjuntos de pontos representados em um sistema de eixos cartesianos, em que a correspondência é unívoca no sentido de x para y.

Os instrumentos criados para a leitura e a explicação da *realidade*, do ponto de vista lógico, avançam, distanciando-se das necessidades que lhes deram origem. Esse é o caso do conceito de função. "Toda a noção acaba por perder a sua utilidade, a sua própria significação, à medida que nos afastamos das condições experimentais em que ela teve a sua origem." (PERRIN, apud CARAÇA, 1951, p.138).

O conceito de função ao longo da história sofreu muitas discussões e mudanças até chegar ao conceito que hoje utilizamos. Somente em 1673 a palavra "função" foi utilizada pela primeira vez com Leibniz. No século XVII o estudo de função estava voltado para variáveis associadas às curvas, e é neste período que surgem várias notações para representarmos as funções. Segundo Kliner (1989), este interesse em curvas fez também com que os matemáticos voltassem sua atenção para os símbolos que apareciam nas fórmulas e equações, independente das curvas originais que estas equações representavam. (BOTELHO, REZENDE, 2005, p.70). Foram muitas as representações utilizadas para as funções, dentre elas: relação entre quantidades variáveis, expressão analítica, relação entre conjuntos e até mesmo como transformação.

Segue abaixo um levantamento histórico sobre o conceito de função ao longo dos séculos. Os conceitos estão baseados no artigo realizado por Leila Bortelho e Wanderley Rezende (2005, p. 65-70):

Evolução Histórica do Conceito de função

- 600 a.c. **- Grécia Clássica - Tales de Mileto**: início de explicações mais racionais para os fenômenos naturais
- 384 - 322 a.c. **- Aristóteles**: explicação das mudanças físicas de forma qualitativa.
- 1100 a 1200 - As ideias de **Aristóteles** são difundidas pelo Oriente, surgindo várias universidades.
- **Roger Bacon** (1214 - 1294) e **Guilherme de Ockham** (1300 - 1349) criticam as ideias de Aristóteles e defendem que as verdades científicas devem ser provadas através da experiência.
- **Kepler** (1571 - 1630): descreveu o movimento dos planetas através de uma lei matemática. Sendo que sua 3ª lei demonstra de forma implicíta o conceito de função. "Os quadrados dos períodos orbitais dos planetas são proporcioanis aos cubos dos semi-eixos maiores das órbitas".
- **Galileu Galilei** (1564 - 1642): Enunciou a lei da queda dos corpos, através da experimentação e com o uso da matemática.
- **René Descartes** (1596 - 1650): utilizou a álgebra para resolver problemas geométricos. Introduziu o sistema de coordenadas para representar as variáveis envolvidas na equações.
- **Pierre de Fermat** (1601 -1665): "Sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha reta ou curva". Assim a expressão algébrica de uma função é a curva, na qual a relação entre as incógnitas é estabelecidade átraves de um lugar geométrico.
- **James Gregory** (1667) - Século XVII: Define função como uma quantidade obtida de outras quantidades pela sucessão de operações algébricas ou por qualquer outra operação imaginável.
- **Isaac Newton** (1642 - 1727): tentando explicar problemas de física contribuiu de maneira significativa para a matemática. O que hoje denominamos de expressão algébrica de uma função, para ele era a relação entre os fluentes.
- **Leibniz** (1673): utiliza pela primeira vez a palavra "função" para indicar as quantidades que estariam variando ao longo de uma curva.
- **Johann Bernoulli** (1718): define função como uma grandeza variável, uma quantidade composta de qualquer maneira desta grandeza variável e constantes.

Continuação

Euler em 1734 utiliza a notação f (x) para representar uma função.

Leonhard Euler (1748): uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de alguma maneira desta quantidade variável e números ou quantidades constantes.

Euler em 1755 define novamente uma função: se x denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de x ou são determinadas por ele são chamadas suas funções.

Joseph - Louis Lagrange em 1797 define função como: Chamamos função de uma ou várias quantidades toda expressão para cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, envolvidas ou não com outras quantidades que consideramos como sendo dadas e valores invariáveis, enquanto as quantidades da função podem assumir todos os valores possíveis. Designaremos em geral pela letra f ou F, colocada antes da variável, toda função desta variável, isto é, toda quantidade que depende desta variável e que varia com ela segundo uma lei dada.

Em 1821 Augustin - Louis **Cauchy** definiu em sua obra os conceitos de função contínua, diferenciável e integrável a partir da noção de limite. Foi o grande responsável pela transformação do Cálculo Diferencial e Integral de Variáveis de Newton e Leibniz com o qual trabalhamos hoje - Cálculo Diferencial e Integral de Funções.

Gustav Lejeune **Dirichlet** (1804 - 1859) define função contínua como: suponhamos que a e b são dois valores dados e x é a quantidade variável que assume, gradualmente, todos os valores localizados entre a e b. Se para cada x corresponde um único y, de modo que, enquanto x percorre o intervalo de a até b, y =f(x) varia gradualmente da mesma forma, então y é chamada função contínua de x para este intervalo.

George Boole (1815 - 1864) define função como qualquer expressão algébrica envolvendo o símbolo x é chamada uma função de x e pode ser representada sob a forma geral abreviada f(x).

Richard Dedekind (1831 - 1916) define função como: uma aplicação de um sistema S uma lei é entendida, de acordo com a qual cada elemento s de S está associado a um determinado objeto que é chamado a imagem de s e denotado por ϕ (s); dizemos também que ϕ (s) corresponde ao elemento s, que ϕ (s) é originada ou gerada pela aplicação ϕ, que s é transformado em ϕ (s) pela aplicação ϕ.

Godfrey Harold Hardy (1877 - 1947) determinou três características para uma função: *(1)* y é sempre determinado por um valor x; *(2)* para cada valor de x para o qual y é dado, corresponde um e somente um valor de y e *(3)* a rrelação entre x e y expressa através de uma fórmula analítica, na qual o valor de y que corresponde a um dado valor de x pode ser calculado por substituição direta de x.

Em 1939 **Bourbaki** traduz a definição de Hardy para a linguagem dos conjuntos como: sejam E e F dois conjuntos distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, para qualquer xϵ E existe um único y ϵ F, e apenas um, que está na relação dada com x. Damos o nome de função à operação que associa a todo elemento x ϵ E o elemento y ϵ F que se encontra na relação dada com x; dizemos que y é o valor da função para o elemento x, e que a função é determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função.

1.2 Relação, Função e Produto Cartesiano: uma abordagem formal

Na vida cotidiana, no campo científico e na matemática em si, as variáveis e suas relações desempenham papel fundamental para explicar fenômenos ou mesmo para permitir inferências sobre conceitos e situações. Essas variáveis podem ser compreendidas por praticidade e conveniência como sendo pertencentes a conjuntos. Na matemática esse assunto recebe especial atenção e é denominado “Teoria dos Conjuntos”.

A definição de função atrelada à Teoria dos Conjuntos é fruto do processo histórico do desenvolvimento desse conceito, como mostrado anteriormente, especificamente ao trabalho do Grupo Bourbaki (1939), constituído por matemáticos franceses, cuja preocupação foi utilizar métodos axiomáticos para tratar diversos campos da matemática. Com ênfase na álgebra abstrata, definem função a partir de dois conjuntos, não apenas numéricos, como traz Rossini, citando Monna:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja $x \in E$, existe um elemento y de F, e somente um, que esteja na relação considerada com x. Dá-se o nome de função à operação que associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra na relação dada com x; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (ROSSINI,2007, p. 207-208)

Algumas formas de organizar e apresentar o conhecimento matemático, no século XX, como a do Grupo Bourbaki, influenciaram o ensino de matemática em todos os níveis, desencadeando o Movimento da Matemática Moderna[2], no Brasil, a partir dos anos 60 e 70. Foram introduzidos nos currículos conteúdos da Teoria de Conjuntos: relações, operações, propriedades, função, dentre outros. Essa tendência influenciou, certamente, os autores de livros didáticos, que incorporaram em suas obras conceitos e abordagens coerentes com os pressupostos deste movimento. Para apresentar aos alunos o conceito de função, primeiro se trabalhava a ideia de par ordenado; depois produto cartesiano como uma das operações entre conjuntos; em seguida, a ideia de relação e. finalmente, o conceito de função. Em seguida, apresentamos essa sequência, presente no livro *Fundamentos de Matemática Elementar:*

---

[2]O Movimento da Matemática Moderna no Brasil ocorreu no contexto de um discurso de modernização do ensino da matemática, que era necessário devido a mudanças econômicas e sociais em vários países. Esse movimento foi influenciado pelas ideias do Grupo Bourbaki e atingiu, inicialmente o ensino da matemática no nível superior, estendendo-se posteriormente aos demais níveis. Há ênfase no rigor, na linguagem formal, nas estruturas matemáticas.

conjuntos e funções, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami, adotada em várias escolas brasileiras, no final da década passada, o que influenciou vários professores de matemática em suas aulas, além de inspirar vários autores.

1.2.1 O produto cartesiano

Consideremos por exemplo o caso em que todos os elementos do conjunto *A* possuem associação com todos os elementos do conjunto *B*, conforme o exemplo da figura 5 que representa um Diagrama de Venn. Cada elemento do conjunto *A* relaciona-se com cada elemento do conjunto *B*. Quando esse fenômeno ocorre entre dois conjuntos, matematicamente define-se que há uma operação denominada "Produto Cartesiano" do conjunto *A* pelo conjunto *B* ou Produto Cartesiano de *A* por *B* ou ainda *A* cartesiano *B*.

Considere o conjunto A formado pelos elementos 1, 3 e 5 e o conjunto B formado pelos elementos 2, 4 e 6, no qual cada elemento do conjunto A se associa com todos os elementos do conjunto B.

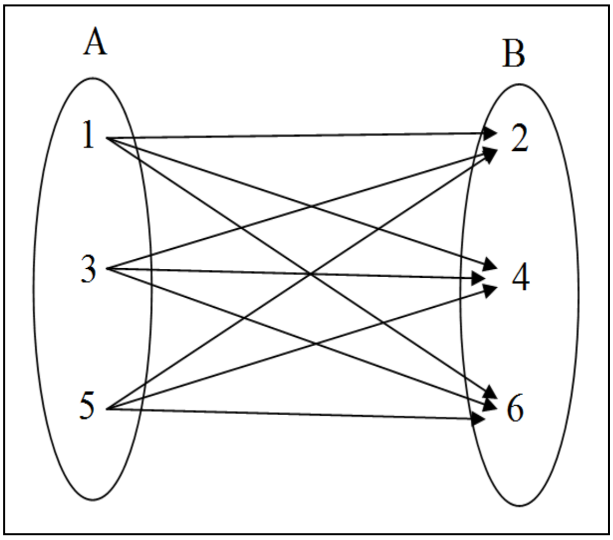


Figura 1:Exemplo de Produto Cartesiano.
Fonte: Acervo pessoal

A definição formal para Produto Cartesiano de acordo com Iezzi e Murakami (2004, p. 67) é a seguinte:

> Sejam *A* e *B* dois conjuntos não vazios. Denominamos produto cartesiano de *A* por *B* o conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos pares ordenados (*x*,*y*), em que o primeiro elemento pertence a *A* e o segundo elemento pertence a *B*:
>
> $$A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Outra maneira de representar esse Produto Cartesiano dá-se por meio do gráfico cartesiano. Cada correspondência ou associação entre elementos de conjuntos, também entendida como par ordenado é representada graficamente em um sistema de eixos coordenados. O eixo da horizontal, denominado eixo *x* ou eixo das abscissas, representa os valores do conjunto de partida. O eixo da vertical, denominado eixo *y* ou eixo das ordenadas, representa o conjunto de chegada. Assim, o produto cartesiano ilustrado na figura 1, tem representação cartesiana conforme o gráfico da figura 2.

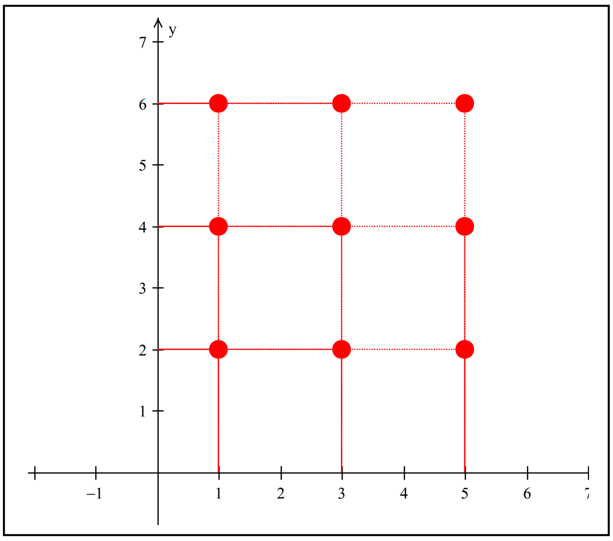


Figura 2: Exemplo gráfico de Produto Cartesiano.
Fonte: Acervo pessoal

1.2.2 Relação binária

O conceito de relação binária entre dois conjuntos *A e B* é simplesmente restrito ao fato de que *R* é um subconjunto de *A* cartesiano *B*. Uma definição formal de Relação binária, de acordo com Iezzi e Murakami (2004, p. 71), é:

$$\text{R é relação binária de A em B} \Leftrightarrow R \subset A \times B$$

Por exemplo, considerando o conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$ e o conjunto $B = \{1,2,3,4,5,6\}$,e a correspondência entre os elementos de A e B, de modo que a um elemento x de A, corresponda um y de B, de acordo com a lei y = x + 2, tem-se a relação $R = \{(x,y) \in A \times B \,/\, y = x + 2\}$, que pode ser representada pelo diagrama a seguir.

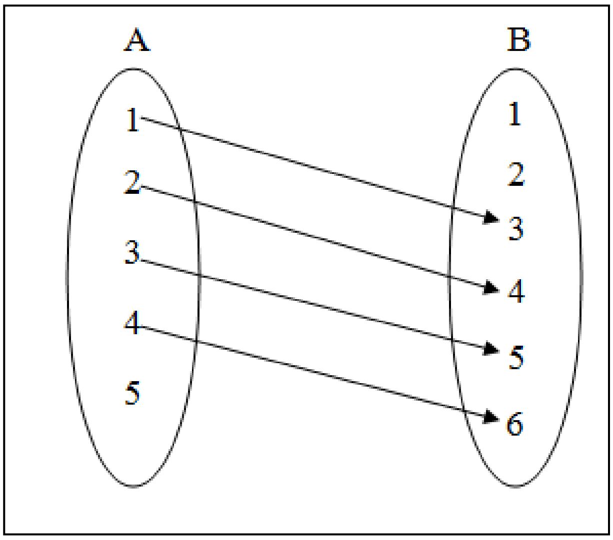


Figura 3: Diagrama de Euler-Venn para relação binária.
Fonte: Acervo pessoal

1.2.3 Função

Por outro lado, se considerarmos uma associação entre os elementos dos dois conjuntos, de maneira que a cada elemento do conjunto A(conjunto de partida)haja um único correspondente no conjunto B(conjunto de chegada), temos uma relação denominada "função". A figura 8 mostra um diagrama de Venn que representa um exemplo de função entre dois conjuntos *A* e *B*.

Para cada elemento x do conjunto $A=\{0,1,2,3\}$, há uma correspondência a um único elemento y do conjunto $B=\{-1,0,1,2,3\}$, de modo que y = x , ou seja, tem-se a relação $R=\{(x,y)\in A\times B / y=x\}$, representada no diagrama a seguir:

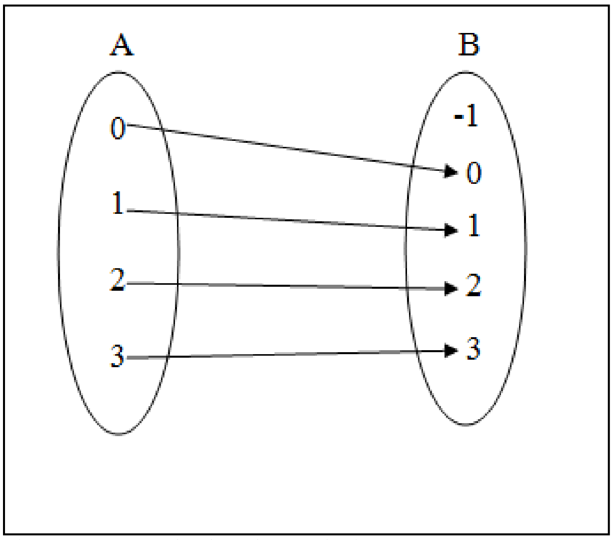


Figura 4:Exemplo de relação de funções.
Fonte: Acervo pessoal

De acordo com Iezzi e Murakami (2004, p. 81): "Dados dois conjuntos *A* e *B*, não vazios, uma relação *f* de *A* em *B* recebe o nome de aplicação de *A* em *B* ou função definida em *A* com imagens em *B* se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$".

Segundo os mesmos autores essa definição é representada da seguinte forma:

$$f \text{ é aplicação de } A \text{ em } B \Leftrightarrow \left(\forall x \in A, \exists \mid y \in B \mid \left(x, y\right) \in f\right)$$

Outros elementos de extrema importância no estudo de funções são *o domínio*,o *contra-domínio* e a *imagem*. Dada uma função, os elementos do conjunto de partida constituem o domínio da função. Em outras palavras, o domínio de uma função é o próprio conjunto de partida. Já o contradomínio é formado pelo conjunto de chegada. A imagem são todos os elementos do conjunto de chegada que possuem alguma correspondência com elementos do conjunto de partida. Consequentemente, a imagem é um subconjunto do contradomínio. De acordo com Iezzi e Murakami (2004, p. 88):

> Chamamos de *domínio* o conjunto *D* dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $\left(x, y\right) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de *A* tem essa propriedade, temos nas funções: **domínio = conjunto de partida**, isto é, D= A.

Dos mesmos autores, segue a definição de imagem de uma função.

> "Chamamos de imagem o conjunto *Im* dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $\left(x, y\right) \in f$; portanto: **imagem é o subconjunto do contradomínio**, isto é, $\mathrm{Im} \subset B$".

A forma como a correspondência entre os elementos é estabelecida pode não ter uma lei estabelecida como mostrado no exemplo anterior, ou pode ter alguma lei matemática ou física que as determine. No segundo caso, denominamos *lei de formação* da função, ou *lei matemática*, nomenclaturas essas que podem se alternar na literatura. A lei de formação nada mais é do que uma fórmula ou regra que envolve os valores de *x* e de *y*, de forma que o valor de *y* seja obtido a depender do valor de *x*. As fórmulas exibidas por meio das equações 1, 2, 3, 4 e 5 são exemplos de leis de formação de funções.

$$y = 2x + 3 \quad (1)$$

$$f(x) = -3x^2 + 2x - 4 \quad (2)$$

$$y = \log\left(x + 5\right) \quad (3)$$

$$f(x) = 2 \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} 2x+5 & \text{se } x < 2 \\ 4 & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \quad (5)$$

As equações 1, 2 e 3 são exemplos de leis de formação de funções onde o valor de *y* é obtido diretamente a partir de uma transformação do valor de *x*. Em outras palavras, o valor de *y* é obtido a partir de operações aritméticas realizadas com o uso do valor de *x*. Já a lei de formação da equação 4, atribui o valor 2 para qualquer valor de *x*. Por último, na equação 5 temos o exemplo de uma lei de formação com mais do que uma sentença matemática, que é alterada conforme são alterados os valores de *x*.

As leis de formação podem se apresentar de diversas maneiras e como tal formam classes ou famílias de funções. Dentre as mais conhecidas, podemos citar as funções constante, linear, afim, quadrática, racional, recíproca, modular, exponencial, logarítmica e trigonométricas. Nas seções seguintes serão abordados os conceitos de função afim e de função quadrática, objeto dessa pesquisa.

Percebemos nessa abordagem descrita anteriormente e muito comum nas aulas de matemática, guiadas por manuais didáticos, o distanciamento entre a origem do conceito de que nos fala Caraça – a necessidade de estabelecer instrumentos matemáticos para explicar quantitativamente e prever fenômenos, e a extensão que lhe é dado pela ciência, ao sistematizá-lo e dar-lhe outras significações. Mas, e no ensino, como ficamos? Que tipo de abordagem devemos dar? Esse é o desafio.

Bertoni (2006, p. 467), ao se referir ao movimento da Matemática Moderna que trouxe essa abordagem mais formal ao ensino afirma que:

> Ao tratar a matemática como algo neutro, destituída de história, desligada de seus processos de produção, sem nenhuma relação com o social e o político, o ensino da Matemática Moderna, veiculado por inúmeros livros didático da época, parece ter se descuidado da possibilidade crítica e criativa dos aprendizes. E os indícios preliminares da apropriação do movimento é que o moderno, da disciplina Matemática, foi incorporado, pelos professores e alunos, mais como um conjunto de novos dispositivos e nomenclaturas de uma nova linguagem.

Com base no referencial teórico que adotamos para esse estudo, a perspectiva da teoria histórico-cultural, a formação de um conceito pelo aluno deve conduzir ao que é sua essência. Não resta dúvidas, de que, em se tratando do conceito de função, essa essência está na ideia de correspondência, ou de relação, que está presente no pensamento humano, desde tempos remotos da civilização humana, quando o homem teve a necessidade de quantificar, de contar os elementos de um conjunto e o fez, estabelecendo a correspondência biunívoca.

Como esse trabalho coloca foco nas funções afim e quadrática, vamos tratá-las sucintamente a seguir.

1.3 Função afim

Do ponto de vista prático, pode representar situações onde há crescimento proporcional da variável independente em relação ao crescimento da variável dependente. De maneira formal, dizemos que uma função definida de *IR* em *IR* que associa a cada $x \in IR$ um valor $(ax+b) \in IR$, com $a \neq 0$ e b sendo números reais, recebe o nome de função afim.

$$f(x) = ax + b, \quad (a \neq 0) \qquad (6)$$

Consideremos a função $f(x) = 2x + 3$ como exemplo. Poderíamos enumerar uma infinidade de pares ordenados dessa função, visto que *x* pode assumir qualquer valor real:

x	$f(x) = 2x + 3$
-2	$f(-2) = 2(-2) + 3 = -1$
-1	$f(-1) = 2(-1) + 3 = 1$
0	$f(0) = 2(0) + 3 = 3$
1	$f(1) = 2(1) + 3 = 5$
2	$f(2) = 2(2) + 3 = 7$
k	$f(k) = 2(k) + 3 = 2k + 3$

Desta forma podemos generalizar para qualquer valor, consideramos um valor genérico "k" para x, o valor encontrado para y será 2k + 3. Observe que o aumento de uma unidade na variável *x* ocasiona o aumento proporcional de duas unidades na variável *y*. Como o aumento da variável *y* é sempre proporcional ao aumento da variável *x*, para fins de construção gráfica, é desnecessário construir mais do que dois pontos no plano cartesiano para representar o gráfico da função. A partir dos dois pontos construídos, pode-se simplesmente construir uma reta que contenha estes dois pontos para representar o gráfico da função. A figura 5 ilustra a construção do gráfico dessa função considerando os pontos cujas abscissas são – 1 e 1.

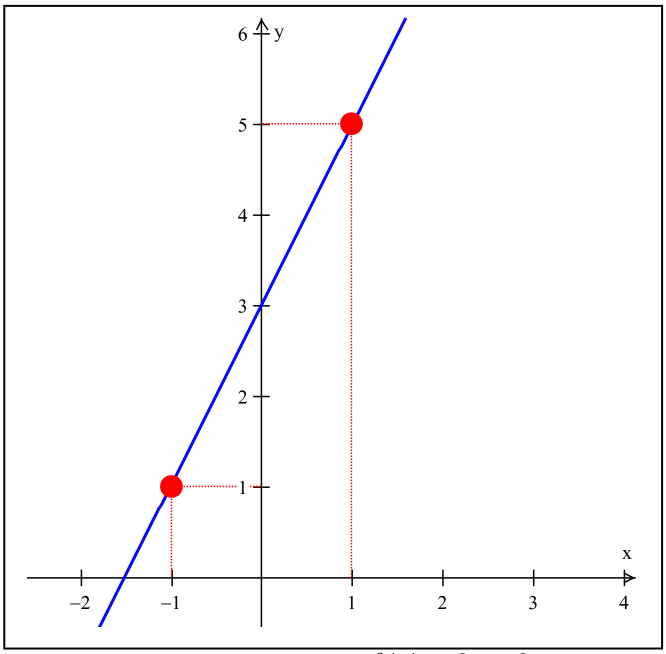


Figura 5: Gráfico da função afim $f(x) = 2x + 3$.
Fonte: Acervo pessoal

De modo similar, se considerarmos a função $f(x) = -x + 1$, temos o gráfico representado pela figura 6.

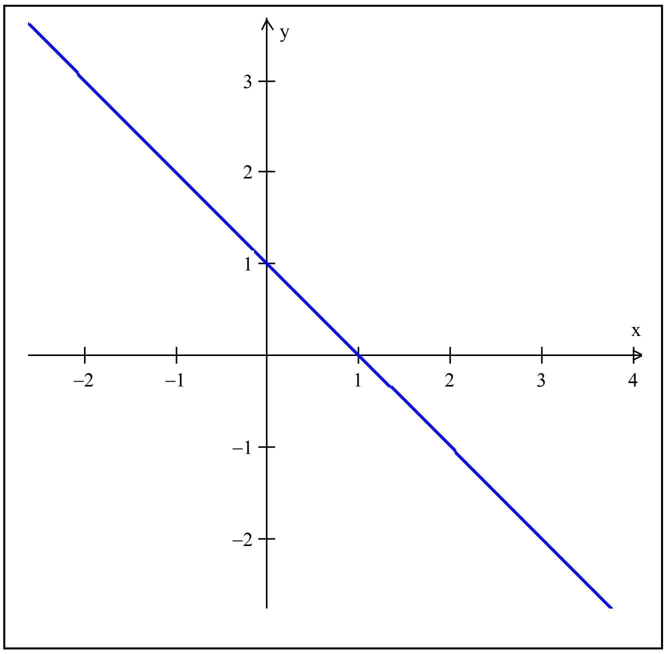


Figura 6: Gráfico da função afim $f(x) = -x + 1$.
Fonte: Acervo pessoal

No primeiro exemplo, o coeficiente "*a*", também chamado de coeficiente angular da função afim, tem valor 2, sendo portanto positivo. Neste caso, o aumento dos valores de *x* ocasiona também o aumento dos valores de *y*. Observando o gráfico, verificamos que há uma inclinação positiva, o que nos leva a classificar aquela função como crescente. Já no segundo exemplo o coeficiente angular é "–1" que é um valor negativo. De forma contrária, o aumento nos valores de *x* ocasiona um decréscimo nos valores de *y*. O gráfico confirma esse comportamento com uma reta de inclinação decrescente. Nesse caso a função é decrescente. Nesse sentido, o coeficiente angular interfere diretamente na inclinação da reta, ou mesmo no crescimento ou decrescimento da função.O seu valor absoluto traduz a razão de proporcionalidade entre os valores de *x* e de *y*, o que indica a essência do conceito da função afim. Vamos utilizar a função y = 2x + 3 para exemplificar a proporcionalidade que ocorre entre os valores de x e de y, ou seja, a taxa de variação é sempre constante:

y = 2x + 3		
Intervalo para a variável x variando em 1 unidade		
$\Delta x = x - x_0$	$\Delta y = y - y_0$	$m = \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$
$\Delta x = 0 - (-1) = 1$	$\Delta y = 3 - 1 = 2$	$m = \dfrac{2}{1} = 2$
$\Delta x = 1 - 0 = 1$	$\Delta y = 5 - 3 = 2$	$m = \dfrac{2}{1} = 2$
$\Delta x = 2 - 1 = 1$	$\Delta y = 7 - 5 = 2$	$m = \dfrac{2}{1} = 2$
$\Delta x = 3 - 2 = 1$	$\Delta y = 9 - 7 = 2$	$m = \dfrac{2}{1} = 2$
$\Delta x = 4 - 3 = 1$	$\Delta y = 11 - 9 = 2$	$m = \dfrac{2}{1} = 2$

y = 2x + 3		
Intervalo para a variável x variando em 2 unidade		
$\Delta x = 2 - 0 = 2$	$\Delta y = 7 - 3 = 4$	$m = \frac{4}{2} = 2$
$\Delta x = 3 - 1 = 2$	$\Delta y = 9 - 5 = 4$	$m = \frac{4}{2} = 2$
$\Delta x = 4 - 2 = 2$	$\Delta y = 11 - 7 = 4$	$m = \frac{4}{2} = 2$
$\Delta x = 5 - 3 = 2$	$\Delta y = 13 - 9 = 4$	$m = \frac{4}{2} = 2$
$\Delta x = 6 - 4 = 2$	$\Delta y = 15 - 11 = 4$	$m = \frac{4}{2} = 2$

De modo particular se o valor do coeficiente "*b*", que também é chamado de coeficiente linear, for zero, então a reta irá passar pela origem do plano cartesiano que é o ponto (0,0). Quando isso ocorre, a função é denominada *linear*. Trata-se de um caso particular da função afim.

O valor do coeficiente linear tem também outra interpretação importante no estudo da função afim. Este valor determina o ponto onde a reta irá interceptar o eixo *y*. Isto é facilmente confirmado quando atribuímos zero para a variável *x*. Veja que $f(0) = a \cdot 0 + b = b$ gerando o ponto $(0, b)$.

Por fim, outro ponto importante no estudo não só da função, como de outros tipos de função, é a raiz ou zero da função. Qual é o valor de *x* que produz *y* igual a zero? No caso da função afim, se fizermos y assumir o valor zero, chegamos a $x = -b/a$.

1.4 A função quadrática

Denomina-se por função quadrática ou função polinomial do 2º grau, toda função que associa a cada $x \in IR$, um elemento $(ax^2 + bx + c) \in IR$, em que a, b e c são reais e $a \neq 0$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0) \qquad (7)$$

Diferente da função afim, o gráfico da função quadrática não corresponde a uma reta. É uma curva chamada de parábola. A parábola é uma curva que, na direção vertical,pode ter a concavidade voltada para baixo ou para cima. As funções $f(x) = x^2 - 3x + 1$ e $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ ilustram os sentidos opostos da concavidade por meio da figura 7.

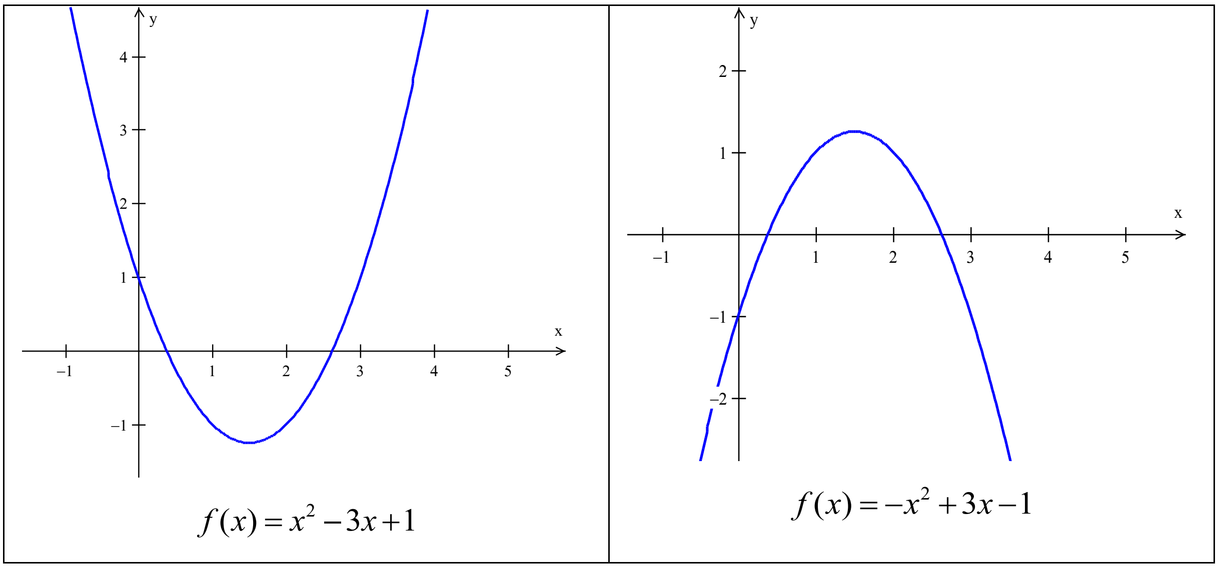


Figura 7: Gráfico da função: $f(x) = x^2 - 3x + 1$ e $f(x) = -x^2 + 3x - 1$
Fonte: Acervo pessoal

A parábola pode ter um ponto máximo ou um ponto mínimo dependendo da disposição de sua concavidade. Esse ponto de máximo ou mínimo é denominado como vértice da parábola. A disposição da concavidade depende diretamente do valor do coeficiente “a”. Quando negativo (a > 0), a concavidade é voltada para baixo e a parábola tem ponto de máximo. Quando positivo (a > 0),a parábola tem a concavidade voltada para cima e tem ponto de mínimo. Ao contrário do que ocorre com a função afim, que sempre intercepta o eixo das abscissas, a função quadrática pode não interceptar esse eixo dependendo de alguns parâmetros. Para determinar se a função tem raízes e quais são essas raízes, o método mais comum é por meio do cálculo do discriminante, conforme equações:

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad (8)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad (9)$$

Considerando $\Delta > 0$ e $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima e a função intercepta o eixo *x* em dois pontos distintos como mostra a figura 8.No caso de $\Delta > 0$ e $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo e a função intercepta o eixo *x* em dois pontos distintos como mostra a figura 8.

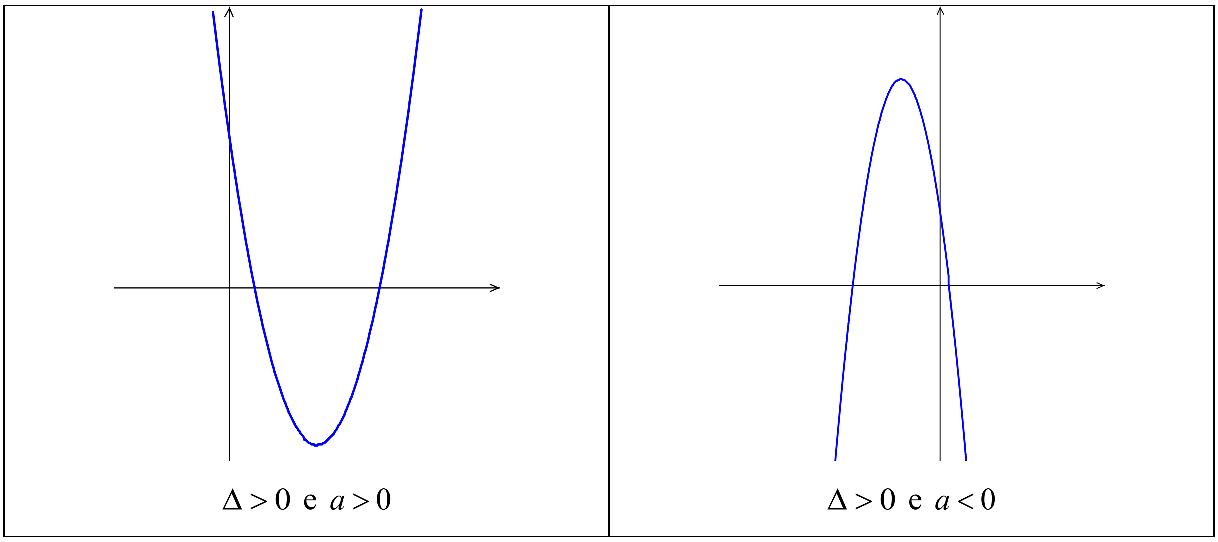


Figura 8:Gráfico da função quadrática com $\Delta > 0$ e $a > 0$;$\Delta > 0$ e $a < 0$.
Fonte: Acervo pessoal

Também se deve considerar o caso de $\Delta = 0$ e $a > 0$, onde a concavidade da parábola é voltada para cima e a função intercepta o eixo *x* em um único ponto como mostra a figura 9. Para o caso em que $\Delta = 0$ e $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo e a função intercepta o eixo *x* em um único ponto como mostra a figura 9.

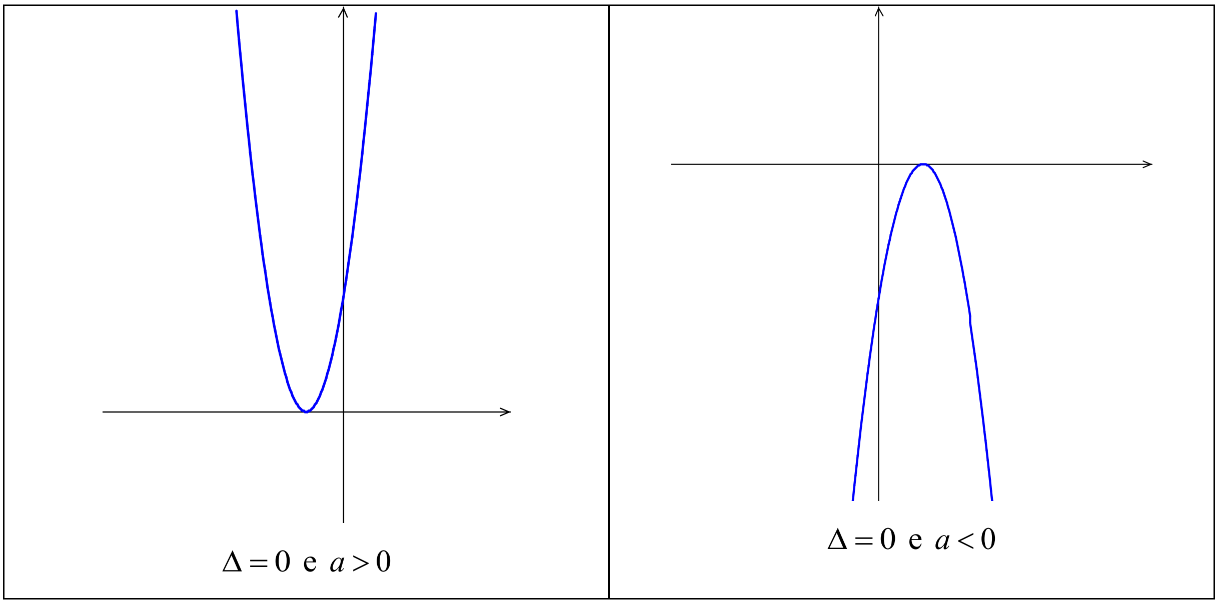


Figura 9: Gráfico da função quadrática com $\Delta = 0$ e $a > 0$;$\Delta = 0$ e $a < 0$.
Fonte: Acervo pessoal

No caso em que $\Delta < 0$ e $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima e a função não intercepta o eixo x como mostra a figura 10. Por último temos o caso em que $\Delta < 0$ e $a < 0$, onde a concavidade da parábola é voltada para baixo e a função não intercepta o eixo x como mostra a figura 10.

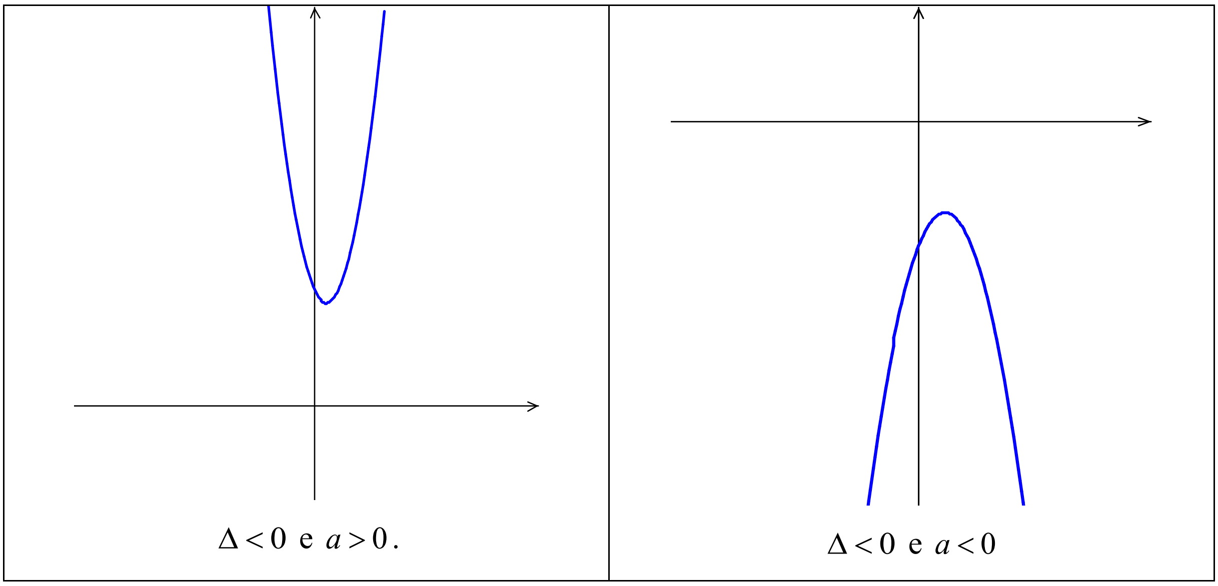


Figura 10:Gráfico da função quadrática com $\Delta < 0$ e $a > 0$; $\Delta < 0$ e $a < 0$.
Fonte: Acervo pessoal

Além da determinação das raízes da função quadrática, também é possível determinar as coordenadas do vértice da parábola por meio das fórmulas 10 e 11.

$$x_v = \frac{-b}{2a} \qquad (10)$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \qquad (11)$$

Já o ponto de interseção da parábola com o eixo y é o valor do coeficiente "c". De fato, pois quando a abscissa é zero, temos $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$, originando o ponto $(0, c)$.

Ao contrário da função afim, a função quadrática possui um intervalo onde é crescente e outro onde é decrescente. Se a função tem a concavidade voltada para cima, então ela é decrescente para todas as abscissas menores do que a abscissa do vértice e crescente para todas as abscissas maiores do que a abscissa do vértice. Quando a concavidade é voltada para baixo, a disposição dos intervalos de crescimento e decrescimento ocorre no sentido inverso. Desta forma, podemos perceber que a essência da função quadrática é a sua simetria em relação ao eixo y.

No próximo capítulo apresentamos os referenciais teóricos fundamentados na Teoria Histórico-Cultural e aspectos referentes à metodologia e aos procedimentos metodológicos.

CAPÍTULO 2– FUNDAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

Para fundamentar a discussão sobre o ensino e a aprendizagem dos alunos na perspectiva da Teoria histórico-cultural, trazemos alguns pressupostos importantes para a compreensão dessa abordagem: a preocupação de Vygotsky com o desenvolvimento das funções psíquicas superiores; a categoria trabalho como constituinte do processo de humanização; o conceito de atividade e a sua relação com a educação e, finalmente, a formação do pensamento teórico, objetivo dos processos de ensino e aprendizagem. Em seguida, apresentamos os pressupostos e a trajetória metodológica.

2.1 Teoria histórico-cultural e a formação de conceitos

2.1.1 Aspectos fundamentais da teoria: o trabalho, a atividade, a mediação e a educação

Vygotsky (2001), ao tomar como objeto de estudo o problema do desenvolvimento das funções psíquicas superiores, estabeleceu as bases da teoria histórico-cultural. Para ele, o objeto e o método de investigação têm ligações estreitas, propondo-se a desenvolver seus estudos com base na investigação experimental.Apoiado em Engels[3], reconhece que a natureza interfere na vida humana, mas o homem, por sua vez atua sobre essa natureza e cria outras condições de existência.

A teoria histórico-cultural tem sua origem no materialismo histórico dialético da teoria de Marx e Engels, considerando que o homem somente se torna humanizado, quando se apropria da cultura na qual está envolvido, ou seja, o homem somente se tornará humano interagindo com o meio que o cerca, por meio da atividade prática,em suas relações sociais e culturais. O estudo na perspectiva dialética supõe examinar os fenômenos em seu movimento, isto é, em seu desenvolvimento, em todas as suas fases, buscando conhecer sua essência, é o que ensina Vygotsky:

> Estudar algo historicamente significa estudá-lo em seu movimento. Esta é a exigência fundamental do método dialético. Quando em uma investigação se abarca o processo de desenvolvimento de algum fenômeno em todas as suas fases e mudanças, desde que surge até que desaparece, isso implica

[3](1820-1895): Fundador, juntamente com Marx, do socialismo cientifico e expositor brilhante de sua filosofia: o materialismo dialético. Na obra *A Sagrada Família,*escrita por eles se encontram os fundamentos do materialismo dialético e da interpretação materialista da história."Na obra que se seguiu, também realizada em colaboração, *A Ideologia Alemã,* é que eles se libertam da influência hegeliana e feuerbachiana, aparecendo como pensadores emancipados e seguros de sua própria concepção." Dicionário Político: marxists internet archive. Disponível em https://www.marxists.org/portugues/dicionario/verbetes/e/engels.htm. Acesso em: 15 jun. 2014

> por de manifesto sua natureza, conhecer sua essência, já que só em movimento demonstra o corpo que é [...] (VYGOTSKY, 2000, p. 67-68, tradução nossa).

Apoiando-se em Marx e Engels, Vygotsky afirma que o homem, ao atuar sobre a natureza externa, modificando-a, o homem também se modifica. Essa relação do homem com o mundo que, num primeiro momento, é externa, interpsíquica, para depois ser interna, intrapsíquica, é sempre uma atividade mediada, isto é, não ocorre diretamente. Para isso, o homem criou as ferramentas e os signos. Assim, para Vygotsky, o que diferencia fundamentalmente o homem dos animais é a capacidade de criar e empregar os signos, isto é, a significação. “A significação é a criação e o emprego dos signos, isto é, de sinais artificiais”. (VYGOTSKI, 2001, p. 84, tradução nossa). A linguagem é como um sistema de signos criados pelo homem e tem papel fundamental no processo histórico de humanização.

Tanto as ferramentas como os signos têm função mediadora, ainda que sejam diferentes do ponto de vista histórico e de sua natureza. “As ferramentas como meios de trabalho, como meios que servem para dominar os processos da natureza e a linguagem como meio social de comunicação e interação, se diluem no conceito geral de artefatos ou adaptações artificiais”. (VYGOTSKI, 2001, p. 93, tradução nossa).Desse modo, segundo o autor, as ferramentas estão direcionadas para a atividade externa do homem, isto é, provocam mudanças no objeto, enquanto os signos são meios que o homem utiliza para controlar a sua conduta e a dos outros, dizem respeito a uma atividade interna.

Uma das principais atividades humanas que possibilita o desenvolvimento do ser humano é o trabalho. É através do trabalho que iremos perceber a diferença entre homem e animal, pois o homem precisa ir além de suas necessidades biológicas e vitais, precisa satisfazer suas necessidades culturais. Nessa perspectiva, o trabalho tem um sentido ontológico, de constituição do ser humano.

A esse respeito, explicam Moretti, Asbahr e Rigon (2010, p. 16), apoiando-se em Andery (1992):

> Satisfazendo suas necessidades, constitui-se como um ser ético, como um ser que cria princípios e preceitos para guiar sua ação, ao mesmo tempo que tais princípios norteiam a constituição de suas necessidades e ações. Nesse processo de relação homem/natureza e, consequentemente, de transformação mútua com natureza, "o homem cria novas necessidades que passam a ser tão fundamentais para ele quanto as chamadas necessidades básicas à sua sobrevivência. Sendo assim, o conceito de necessidade, originalmente biológico, transforma-se para o homem em necessidade histórico-cultural.

A atividade humana e a consciência formam juntas uma unidade dialética. Contudo, para uma atividade ser considerada humana deve possuir uma intenção. Pois, certas necessidades são comuns aos homens e aos animais, como alimentar-se, abrigar-se, reproduzir-se, mas o que torna o homem diferente dos animais é a sua capacidade de apropriar e produzir conhecimento.

> Nas relações entre a consciência e a atividade, a consciência é a forma especificamente humana do reflexo psíquico da realidade, ou seja, é a expressão das relações do indivíduo com o mundo social, cultural e histórico, que abre ao homem um quadro do mundo em que ele mesmo está inserido. A consciência refere-se, assim, à possibilidade humana de compreender o mundo social e individual como passíveis de análise (MORETTI; ASBAHR; RIGON, 2010, p.20).

Um fator fundamental é que o trabalho provoca alterações de ordens psicológicas e não apenas biológicas. Assim, o ser humano, em sua relação com a sociedade, provoca mudanças em seu comportamento da mesma forma que domina a natureza. Entretanto essa relação do homem com o mundo não é uma relação direta, fazem-se necessários instrumentos e signos, como nos referimos anteriormente.

Uma dos principais signos é a linguagem. É por meio dela que o homem expressa sua forma de agir e de ser, é por meio dela que acontece entre gerações as trocas de informações e de conhecimentos, ou seja, o homem assimila a cultura. Segundo Moretti, Asbahr e Rigon (2010, p. 20):

> A consciência não se reduz a um mundo interno isolado, ao contrário, se está intimamente vinculada à atividade, só pode ser expressão das relações do indivíduo com os outros homens e com o mundo circundante, sendo social por natureza. Mas a passagem do mundo social ao mundo interno, psíquico, não se dá de maneira direta, pois o mundo psíquico não é cópia do mundo social. No trânsito da consciência social para a consciência individual, a linguagem e a atividade coletiva têm papel fundamental. Sendo o trabalho atividade socialmente organizada, a linguagem torna-se necessidade e condição para o desenvolvimento social. Pela linguagem, os homens compartilham representações, conceitos, técnicas e os transmitem às próximas gerações.

Um dos focos mais importantes abordados da Teoria Histórico-Cultural pelos psicólogos russos é o conceito de atividade. Segundo Leontiev (2001), o processo de humanização acontece por meio de atividades que o homem realiza em suas interações sociais.

Leontiev (2001) considera a educação como um processo no qual, para se tornar humanizado o homem precisa se apropriar da cultura produzida pela humanidade, ou seja, precisa estar em atividade com os objetos e o mundo ao seu redor, mas sendo mediado pela linguagem. Desta forma, a cada nova geração não é necessário reinventar o mundo, pois através dessa relação,herdamos de gerações que nos antecederam a cultura da humanidade. Neste processo, a escola aparece como um espaço de apropriação do conhecimento historicamente produzido.

Assim, podemos perceber que a escola tem um papel fundamental na vida do ser humano, fornecendo elementos e condições necessárias para viver em sociedade. Mas, eis que surge um grande impasse para a instituição escola, se considerarmos o processo de educação, como processo de apropriação que se dá historicamente por meio das relações do homem e de suas gerações. É impossível para a escola transmitir todo o saber acumulado ao longo da história, assim é preciso selecionar o que é mais relevante para a formação do ser humano, ou seja, aquilo que irá propiciar o seu desenvolvimento como homem.

Quais seriam as informações mais importantes que devem ser priorizadas nos currículos das escolas? O que norteia essas escolhas são os conteúdos que devem compor as disciplinas que fazem parte dos currículos. Conforme afirma Moretti, Asbahr e Rigon (2010, p. 30):

> [...] aquilo que é priorizado para compor os currículos escolares reflete, de alguma forma, a expectativa de formação que um determinado grupo social tem acerca dos indivíduos que o compõem. Não é por outra razão que em diferentes momentos da história conteúdos são questionados e outros são inseridos nos currículos escolares.

Existem dois elementos fundamentais para que ocorra esse processo de educação em um ambiente escolar, o professor e o aluno. Para o professor desenvolver seu trabalho pedagógico é necessário realizar o planejamento das aulas. E cabe ao aluno ser um agente ativo de seu processo de aprendizagem, e não um mero consumidor da aula. Segundo Moretti, Asbahr e Rigon (2010) o sujeito só se modifica, só aprende, se ele participa ativamente do processo educativo e, para isso, deve querer aprender, deve ser compreendido como um ser de vontade, como um ser ético.

No processo de ensino e aprendizagem, há um sujeito fundamental, que é "o professor". Ele possui um papel muito importante pois é responsável pela organização da atividade, ou, melhor,à organização do ensino, de forma a levar o aluno a se apropriar dos conhecimentos. Segundo Moretti, Asbahr e Rigon (2010, p.25),“pensar uma ‘educação humanizadora’ implica considerar o trabalho como mediação necessária no processo de constituição dos sujeitos, e não apenas como fim em si mesmo.”

É importante destacar que nessa perspectiva teórica, aprendizagem, desenvolvimento e ensino estão relacionados de forma intrínseca e complexa, como afirma Sforni (2002). Não se trata de uma relação hierarquizada, mas de uma relação de cumplicidade mútua em que desenvolvimento gera aprendizagem e aprendizagem gera desenvolvimento. Dessa forma, o ensino ganha novos contornos, pois não se destina apenas a objetivos imediatos, mas se coloca em função do processo de humanização do estudante.

2.1.2 O pensamento empírico e o teórico e a questão da generalização

Como nesta investigação, pretendemos discutir o ensino e a aprendizagem de um conceito matemático essencial, o conceito de função, que, como vimos anteriormente, foi construído ao longo da história da humanidade, fomos buscar na teoria histórico-cultural, elementos para tratar o processo de formação de conceitos científicos pelo aluno.

Existem dois tipos de pensamentos no ambiente escolar: pensamento teórico e pensamento empírico. E são esses dois tipos de pensamentos que influenciam o modo como o conhecimento é apropriado. Segundo Davidov (1987), falando das crianças,a generalização empírica se baseia na observação externa dos objetos, refere-se a um tipo de pensamento em que elas formam só procedimentos particulares de tarefas práticas. Enquanto que o pensamento teórico supõe procedimentos gerais de amplas classes de tarefas, ou seja o estudante desenvolve "o princípio geral de solução de problemas análogos", a partir dos quais pode enfrentar outros situações particulares. Os principais componentes do pensamento teórico são: a reflexão, a análise e o plano interno das ações. (DAVIDOV, 1988)

Segundo Rosa, Moraes e Cedro (2010, p. 67):

> A apropriação por parte do sujeito do conhecimento científico oferece a ele condições de compreender novos significados para o mundo, ampliar seus horizontes de percepção e modificar as formas de interação com a realidade que o cerca; em suma, permite a ele transformar a forma e o conteúdo do seu pensamento. Entretanto, o conhecimento científico configura-se de um modo diferente no cenário da escola; ele passa a ser regulado pelo que podemos chamar de "cultura escolar". Essa situação exige a sua transformação em conhecimento escolar.

Mas, essa apropriação que conduz ao desenvolvimento do pensamento teórico do aluno, exige um processo de transformação do conhecimento científico em conhecimento escolar. Desta forma, a escola pode influenciar muito na vida do aluno enquanto sujeito capaz de construir sua própria identidade, podendo ampliar ou mesmo restringir as possibilidades de seu desenvolvimento psíquico.

Para melhor compreendermos como ocorre o processo de assimilação do pensamento, primeiro precisamos entender três principais processos e formas do pensamento: a generalização, a abstração e o conceito.

Vygotsky, em sua teoria, considera que a linguagem tem função primordial no desenvolvimento do ser humano, sendo possuidora de duas funções essenciais: a comunicação entre os seres e a generalização do pensamento. Assim, a palavra é um dos principais signos utilizados na formação do conceito:

> Todas as funções psíquicas são processos mediados, e os signos constituem o meio básico para dominá-las e dirigi-las. O signo mediador é incorporado à sua estrutura como uma parte indispensável, nas verdade a parte central do processo como um todo. Na formação de conceitos, esse signo é a palavra, que em princípio tem o papel de meio na formação de um conceito e, posteriormente, torna-se o seu símbolo.(VYGOTSKY, 1993, p.48).

Vygotsky define de forma geral o processo de generalização, no qual enfatiza o papel da palavra como "unidade de generalização", que expressa aquilo que é comum:

> A generalização - escreveu Vygotsky - é um ato do pensamento perfeitamente conceitual (semântico) que reflete a realidade de modo bastante diferente de como esta é refletida nas sensações e nas percepções imediatas". E, em seguida, acrescenta a seguinte observação: "Existem todos os fundamentos para considerar o significado da palavra como unidade do pensamento, mas como unidade de generalização, de comunalidade, de comunicação e de pensamento (VYGOTSKY, 1982, apud DAVYDOV, 1992, p. 1).

A formação do *conceito* é caracterizada pelo processo de abstração e generalização. Vygotsky (1993, p. 66) considera que não basta para a formação do conceito a percepção daquilo que unifica elementos que inicialmente são dispersos, faz-se necessária a abstração em que esses elementos se descolam da experiência concreta:

> A principal função dos complexos consiste em estabelecer ligações e relações. O pensamento por complexos dá início à unificação das impressões dispersas; ao organizar elementos discretos da experiência em grupos cria uma base para futuras generalizações. Mas o conceito desenvolvido pressupõe algo mais do que a unificação. Para formar esse conceito é também necessário abstrair, isolar elementos e ver os elementos abstraídos da totalidade da experiência concreta em que se encontram mergulhados. Na genuína gênese dos conceitos é tão importante unificar como separar: a síntese tem que combinar-se com a análise. O pensamento por complexos não pode efetuar ambas as operações.

A abstração é um componente que permite chegar à generalização. A abstração parte do geral para o particular. Segundo Davydov (1982):

> [...] separar como geral uma certa qualidade implica desgarrá-la de outras qualidades, o que permite ao [sujeito] transformar a qualidade geral em objeto independente e singular de seus atos subsequentes (o atributo geral se designa com algum signo: vocábulo, desenho gráfico, etc). O conhecimento do geral, sendo resultado da comparação e de sua fixação por meio de um signo, constitui sempre algo *abstrato, não concreto e imaginável* (DAVYDOY, 1982, apud ROSA; MORAES; CEDRO, 2010, p. 70).

Para Vygotsky(1993), o processo de generalização se distingue em três níveis: *amontoados sincréticos, complexos* e *conceitos, c*omo o próprio nome indica, *amontoados sincréticos* quer dizer agrupamento ou reunião de um conjunto de objetos de forma desorganizada, ou melhor nos referindo, agrupamento ao acaso.Nessa fase o significado da linguagem não está completamente formado. Essa fase é dividida em três estágios:o *1º estágio* é uma fase de experimento na qual a criança fará a experiência do agrupamento do objeto por tentativas e erros; no *2º estágio,* a diferença significante é que o objeto está presente no campo visual da criança no momento em que está realizando o agrupamento,uma relação mais complexa, pois envolve a relação de contiguidade e espaço entre os elementos; no *3º estágio,* ocorre os agrupamentos que já foram formados nos dois estágios anteriores. Segundo Vygotsky (1993, p. 52), "a única diferença é que ao tentar dar significado a uma nova palavra, a criança agora o faz por meio de um operação que se processa em duas etapas".

O *pensamento por complexo* possui uma característica de pensamento coerente e objetivo, é uma fase na qual relacionamos mais a objetos concretos do que a conceitos generalizados. Desta forma, podemos dizer que o pensamento se relaciona a um plano real-concreto, mais do que o lógico-abstrato.Vygotsky (1993, p. 53) considera:

> As ligações factuais que subjazem aos complexos são descobertas por meio da experiência direta. Portanto, um complexo é, antes de mais nada, um agrupamento concreto de objetos unidos por ligações factuais. Uma vez que um complexo não é formado no plano do pensamento lógico abstrato, as ligações que o criam, assim como as que ele ajuda a criar, carecem de unidade lógica; podem ser de muitos tipos diferentes. Qualquer conexão factualmente presente pode levar à inclusão de um determinado elemento em um complexo. É esta a diferença principal entre um complexo e um conceito. Enquanto um conceito agrupa os objetos de acordo com um atributo, as ligações que unem os elementos de um complexo ao todo, e entre si, podem ser tão diversas quanto os contatos e as relações que de fato existem entre os elementos.

A fase dos complexos é dividida em cinco estágios de desenvolvimento: complexo associativo, complexo de coleções, complexo de cadeia, complexos difusos e a mais discutida delas a dos pseudo-conceitos.

Os *pseudo-conceitos* é um elo que ocorre entre a transição da generalização do pensamento por complexo e a formação do conceito. Vygotsky utiliza o seguinte exemplo: selecionamos um triângulo amarelo e pedirmos a uma criança que dentre algumas figuras de um grupo amostral separe todos os demais triângulos. A criança irá utilizar o complexo associativo no qual, estará separando figuras semelhantes à solicitada, sem se preocupar com a definição de triângulo, ou seja, a forma como foi agrupado o objeto pela criança não caracteriza a formação do conceito.

> Os pseudo-conceitos predominam sobre todos os outros complexos no pensamento da criança em idade pré-escolar, pela simples razão de que, na vida real, os complexos que correspondem ao significado das palavras não são espontaneamente desenvolvidos pela criança: a trajetória seguida por um complexo no seu desenvolvimento encontra-se pré-determinada pelo significado que determinada palavra já possui na linguagem dos adultos (VYGOTSKY, 1993, p. 58).

Davydov (1992)considera que o estágio dos pseudo-conceitos não acontece somente na fase infantil, na fase adulta, se desenvolve no pensamento cotidiano, baseando-se na linguagem comum.

E para finalizar o terceiro nível é a formação do *conceito,* é caracterizada pelo processo de abstração e generalização. Vygotsky (1993, p. 66) considera que:

> A principal função dos complexos consiste em estabelecer elos e relações. O pensamento por complexos dá início à unificação das impressões desorganizadas; ao organizar elementos discretos da experiência em grupos, cria uma base para generalizações posteriores.
>
> Mas o conceito desenvolvido pressupõe algo além da unificação. Para formar esse conceito também é necessário abstrair, isolar elementos, e examinar os elementos abstratos separadamente da totalidade da experiência concreta de que fazer parte. Na verdadeira formação de conceitos, é igualmente importante unir e separar: a síntese deve combinar-se com a análise. O pensamento por complexos não é capaz de realizar essas duas operações.

A seguir um esquema que resume o processo de formação do pensamento:

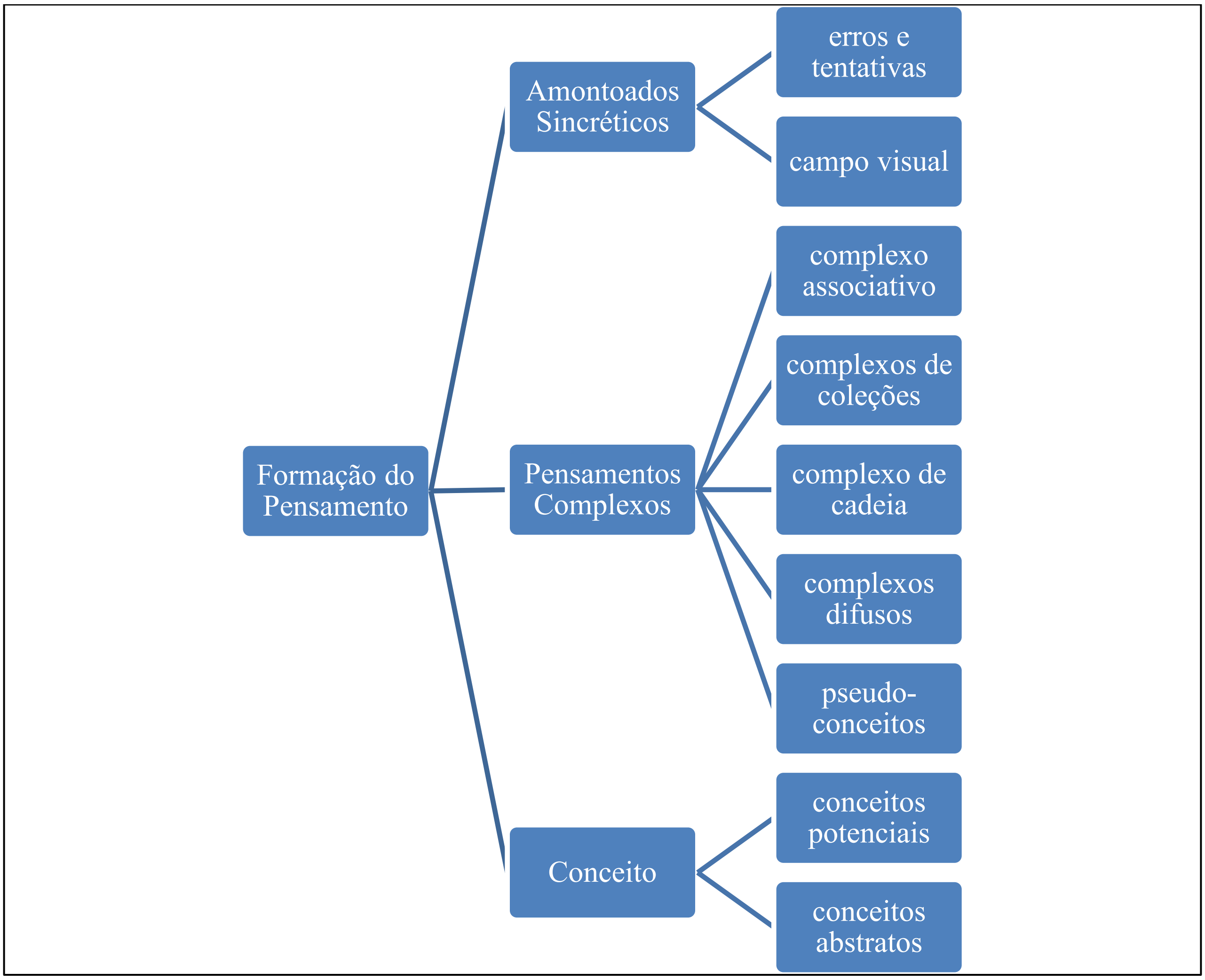


Figura 11: Organograma do processo de formação do pensamento.
Fonte: Elaboração da pesquisadora

A formação dos conceitos pode ser classificada em dois tipos: conceitos potenciais ou espontâneos e conceitos científicos. Podemos dizer que ambos são de fundamental importância para o desenvolvimento psíquico do ser humano, mas é o conceito científico que a aprendizagem escolar possibilitará, neles incluídos a formação dos conceitos matemáticos.

> As nossas investigações mostraram que um conceito se forma não através do jogo mútuo das associações, mas através de uma operação intelectual em que todas as funções mentais elementares participam numa combinação específica. Esta operação é orientada pela utilização das palavras como meios para centrar ativamente a atenção, para abstrair certos traços, sintetizá-los e representá-los por meio de símbolos (VYGOTSKY, 2001, p. 191).

Os conceitos potenciais ou espontâneos surgem a partir dos fatos que vivemos em nosso cotidiano e na interação com os outros seres humanos, assim partimos do particular para o geral, ou seja, o último processo é a generalização. Ambos os conceitos estão entrelaçados, pois para que o conceito científico possa se desenvolver é necessário que o aluno possua um certo conhecimento do conceito potencial.

> Os conceitos espontâneos surgem quando a criança se depara com coisas reais entre as quais, depois de uma prolongada comparação, encontra alguns traços comuns e pela palavra a reporta a uma determinada classe de objetos (forma o "conceito" ou, mais exatamente, a "representação geral"). É este o percurso do concreto ao abstrato. Possuindo este conceito a criança toma consciência do objeto nele representado, mas não do conceito mesmo, do próprio ato de pensamento pelo qual se representa o objeto dado (DAVYDOV, 1992, p. 5).

Já o conceito científico acontece de modo formal em um ambiente de ensino, em que a generalização do pensamento acontece do geral para o particular, por meio de um movimento do abstrato para o concreto, como explica Davydov (1992, p. 6)

> [...] o desenvolvimento do conceito científico começa com o trabalho sobre o conceito mesmo enquanto tal, da sua designação verbal, daquelas operações que não pressupõem um uso espontâneo destes conceitos. A formação deste tipo de conceito tem início não pelo imediato encontro com as coisas, mas já da relação mediada com o objeto (pela definição que expressa uma notória abstração). Desde os primeiros passos na instrução a criança verifica relações lógicas entre objetos e só sob esta base procede, depois, no caminho para o objeto, relacionando com a experiência. Adquire consciência, inicialmente, melhor do conceito do que do objeto. Realiza-se um movimento do conceito para a coisa, do abstrato para o concreto. Tal percurso somente se torna possível dentro de um ensino das noções científicas especificamente organizado para crianças e é especifico resultado disso.

Ao pedirmos a nossos alunos que observem um objeto e, com base nisso, expliquem, utilizando os mais diversos meios, as observações realizadas, estamos possibilitando a formação do conceito. Mas, Davydov (1992) considera que esta é uma forma intuitiva do processo de generalização, e que não possibilita o completo desenvolvimento do pensamento.

Segundo Davydov (1988), o pensamento que acontece através das abstrações e generalizações de caráter lógico-formal é denominado de conceitos empíricos, porque:

> A lógica formal examina os traços do conceito apenas sob o ponto de vista da função de diferenciação de uma classe de objetos, refletida em um ou outro conceito, em relação à classe. O problema da essência nos objetos, é um problema da lógica dialética (DAVYDOV, 1988, p. 61).

Desta forma, uma das principais características do pensamento empírico é a generalização. É importante salientar que, segundo a ótica dos psicólogos e pedagogos russos, o aluno generaliza por meio de observações, assim:

> No processo de ensino, a palavra do professor organiza a observação dos alunos, indicando com exatidão o objeto da observação, orienta a análise para diferenciar os aspectos essenciais dos fenômenos daqueles que não o são e, finalmente, a palavra-termo, sendo associada aos traços distinguidos, comuns para toda uma serie de fenômenos, se converte em seu conceito generalizador. O programa de ensino na escola leva em conta, geralmente, as leis mencionadas de desenvolvimento da generalização nos escolares. Os alunos paulatinamente são levados às generalizações por meio da observação e do material concreto dado visualmente e captado sensorialmente (DAVYDOV, 1988, p. 61).

O pensamento empírico percorre o caminho do particular para o geral. Podemos também reduzir a dois princípios básicos: abstração e generalização, comparação e classificação. De acordo com a lógica-formal (Davydov, 1988, p. 62), o processo que envolve o pensamento empírico se limita a comparar os dados sensoriais concretos com a finalidade de separar os traços formalmente gerais, e realizar sua classificação e identificar os objetos sensoriais concretos com a finalidade de sua inclusão em uma ou outra classe.

Uma das características do pensamento empírico é a organização da atividade sensorial com objetos da realidade. Para o psicólogo Baránov (apud DAVYDOV, 1988) é difícil estruturar o sistema de ensino, em que uma criança de sete anos acostumada a operar com imagens concretas próximas a sua realidade, precisa sair deste mundo e adentrar o mundo das abstrações para formar novos conceitos; isto gera um desenvolvimento negativo para esta criança em termos mentais e morais. Assim, é importante considerar, nesta fase inicial, na qual surgem a formação dos primeiros conceitos matemáticos e gramaticais utilizar esse processo de imagens e impressões concretas, não esquecendo suas propriedades essenciais.

> As particularidades da formação dos conceitos empíricos aclaram o sentido do conhecido requisito didático de avançar no ensino do particular ao geral. O geral, neste caso, é o resultado da comparação de objetos singulares, de sua generalização em um conceito sobre uma ou outra classe de objetos. Aparece como resultado da ascensão do sensorial-concreto ao mental-abstrato, expresso na palavra. Neste esquema, os termos "empírico" e "teórico" recebem uma interpretação peculiar. O primeiro é o sensorial-concreto e o segundo, o abstrato-geral, verbal. Quanto mais alto o nível de generalização, quer dizer, quanto maior o conjunto de diferentes objetos que entoam na classe dada, mais abstrato e "teórico" será o pensamento. A capacidade para pensar abstratamente se interpreta como índice de um alto nível de desenvolvimento do pensamento (DAVYDOV, 1988, p. 65).

Ao contrário, o pensamento teórico percorre o caminho do geral para o particular. Assim, a análise acontece a partir do próprio conceito e não de suas representações gerais, na qual busca revelar a sua essência. Para Davydov (1988)o conteúdo do pensamento teórico é determinado na própria existência mediatizada, refletida e essencial do ser.

> O pensamento teórico é o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetivo-prática, a reprodução, nela, das formas universais das coisas. Tal reprodução tem lugar na atividade laboral das pessoas como peculiar experimento objetivo-sensorial. Logo, esse experimento adquire cada vez mais um caráter cognoscitivo, permitindo às pessoas, com o tempo, a realizar os experimentos mentalmente (DAVYDOV, 1988, p. 125 apud ROSA; MORAES; CEDRO, 2010, p. 79).

Considerando que o pensamento empírico é um tipo de pensamento que pode se desenvolver em qualquer lugar, independente da escolarização, tendo como base os aspectos externos e as observações dos objetos, podemos observar que é através do pensamento teórico que acontece a apropriação dos conceitos científicos. Davydov (1988) descreve como no ambiente escolar a criança deve ser auxiliada pelo professor na busca daquilo que é geral, isto é, da essência de um dado objeto, que se manifesta em outras situações particulares. O conceito representa o "núcleo" do objeto em estudo:

> Ao iniciar o domínio de qualquer matéria curricular, os alunos, com a ajuda dos professores, analisam o conteúdo do material curricular e identificam nele a relação geral principal e, ao mesmo tempo, descobrem que esta relação se manifesta em muitas outras relações particulares encontradas nesse determinado material. Ao registrar, por meio de alguma forma referencial, a relação geral principal identificada, os alunos constroem, com isso, uma abstração substantiva do assunto estudado. Continuando a análise do material curricular, eles detectam a vinculação regular dessa relação principal com suas diversas manifestações obtendo, assim, uma generalização substantiva do assunto estudado.
> Dessa forma, as crianças utilizam consistentemente a abstração e a generalização substantivas para deduzir (uma vez mais com o auxílio do professor) outras abstrações mais particulares e para uni-las no objeto integral (concreto) estudado. Quando os alunos começam a usar a abstração e a generalização iniciais como meios para deduzir e unir outras abstrações, eles convertem as estruturas mentais iniciais em um conceito, que representa o "núcleo" do assunto estudado. Este "núcleo" serve, posteriormente, às crianças como um princípio geral pelo qual elas podem se orientar em toda a diversidade do material curricular factual que têm que assimilar, em uma forma conceitual, por meio da ascensão do abstrato ao concreto. DAVYDOV (1988, p. 22).

De forma geral, o pensamento empírico possui a função de catalogar e classificar os objetos e fenômenos, já o pensamento teórico reproduz a essência do objeto em questão. Baseando-se nos estudos realizados por Davydov, podemos estabelecer as diferenças existentes entre o pensamento empírico e teórico,apresentadas no quadro (Comparação entre o conhecimento empírico e o conhecimento teórico) a seguir.

Característica	Conhecimento Empírico	Conhecimento Teórico
Elaboração	Mediante a comparação dos objetos às suas representações, valorizando-se assim as propriedades comuns aos objetos.	Por meio de uma análise do papel e da função de uma certa relação entre as coisas no interior de um sistema.
Tipo de generalização	Generalização formal das propriedades dos objetos que permite situar os objetos específicos no interior de uma dada classe formal.	Forma universal que caracteriza simultaneamente um representante de uma classe e um objeto particular.
Fundamentação	Observação dos objetos.	Transformação dos objetos.
Tipo de representação	Representações concretas do objeto.	Representaçãoda relação entre as propriedades do objeto e as suas ligações internas.
Relações	A propriedade formal comum é análoga às propriedades dos objetos.	Estabelece uma ligação entre o geral e o particular.
Concretização	Por meio de escolha de exemplos relativos a certa classe formal.	Mediante a transformação do saber em uma teoria desenvolvida por meio de uma dedução e uma explicação.
Forma de expressão	Um termo.	Diferentes sistemas semióticos.

Quadro 1: Comparação entre o conhecimento empírico e o conhecimento teórico.

Fonte: RUBTSOV, 1996 apud ROSA; MORAES; CEDRO (2010, p. 77) (adaptado).

Essa diferenciação entre o pensamento empírico e o teórico é fundamental para o professor de matemática na condução de seu ensino, especialmente no nível superior. Precisamos repensar qual o tipo de pensamento queremos desenvolver em nossos educandos, como está organizado nosso sistema de ensino e, principalmente, pensar nos caminhos didáticos as seguir visando ao desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Ao longo desta reflexão podemos perceber que é essencial a apropriação do conhecimento teórico pelos nossos alunos. Não se trata, porém, de uma visão maquineísta entre pensamento teórico e empírico, como bem lembrou a Profa. Ana Maria Bortolanza no exame de qualificação, mas de compreender que o empírico é base na formação do pensamento teórico.

2.2 O percurso inicial

Conforme já nos referimos anteriormente, há, no Brasil, neste início de século, uma escassez de profissionais para atuar no campo das engenharias, o que tem aumentado a demanda por vagas no ensino superior. O crescimento da oferta de cursos na modalidade EAD e a necessidade de formação de novos engenheiros levaram à criação de cursos de engenharias também nessa modalidade. A atuação da pesquisadora nestes cursos aguçou o seu interesse em realizar a pesquisa com alunos dessa modalidade, considerando, ainda, a criação na instituição pesquisada de um módulo intitulado de Estudos Preparatórios em Matemática Básica no Ambiente Virtual de Aprendizagem –AVA. Esse componente tem o objetivo de minimizar a dificuldade no estudo do componente Estudo lógico-matemático, que se refere à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1. Assim, no contexto dessa problemática, levantamos, inicialmente, a pergunta norteadora da pesquisa: Como uma sequência didática mediada pelas mídias digitais promove o ensino e a aprendizagem do aluno das funções afim e quadrática?

Desta forma, para responder a esta pergunta, iniciou-se a pesquisa com a elaboração de atividades que iriam compor o AVA no tema Matemática Básica, no qual os alunos estariam inseridos e participariam das atividades propostas.

A pesquisa foi iniciada no 1º semestre de 2013, com apenas uma turma do curso de Engenharia Civil na modalidade a distância na instituição pesquisada.Como em um ambiente virtual de aprendizagem não podemos optar por selecionar ou determinar alunos para participar da pesquisa, todos os alunos seriam convidados a participar do projeto, independente do número de alunos que iniciassem neste período.

Apesar deste componente ter sido criado para atender a este déficit dos alunos em Matemática Básica, é um componente que não pertence à estrutura curricular do curso, assim não é avaliativo. Neste dia, este fato não foi informado aos alunos, apenas foi enfatizada a importância do componente para sua vida acadêmica.

Após o início da pesquisa, observamos que os estudantes não tinham interesse pela disciplina de Estudos Preparatórios em Matemática Básica. A participação nos fóruns de discussão, a realização das atividades e a busca pelo esclarecimento de dúvidas foi extremamente baixa. Entre as alegações dos estudantes, pôde-se observar que eles já tinham tempo escasso para cumprimento das atividades das disciplinas regulares, o que os impedia de dedicar-se a essa disciplina não obrigatória.

Diante da insuficiência dos dados obtidos nesse primeiro momento, apesar da insistência da professora pesquisadora, foi necessário rever a questão, o campo de pesquisa, bem como os procedimentos metodológicos.

Com o insucesso da pesquisa na modalidade EAD, mudamos nosso foco para um estudo da aprendizagem dos conteúdos de função afim e função quadrática na disciplina Cálculo, nos cursos de Engenharias na modalidade presencial.

Reiniciamos nossa pesquisa, trabalhando com os alunos dos cursos de engenharias na modalidade presencial: civil, ambiental, elétrica, produção, química e computação de uma instituição privada, situada em Uberaba-MG. Nessa instituição, a disciplina Cálculo1 é comum a todos os cursos de engenharias e ministrada no primeiro período.

O professor que se dispôs a participar da pesquisa possuía duas turmas, assim nos disponibilizou uma delas de acordo com o horário mais adequado e o andamento do conteúdo. Essa turma possuía 60 alunos, mas como a atividade foi desenvolvida em um laboratório de informática, cuja infraestrutura comporta apenas 30, ela foi dividida em dois grupos de forma aleatória. Os próprios alunos escolheram os dias nos quais estariam participando da atividade.

2.3 A metodologia e os procedimentos metodológicos

A pesquisa possui uma abordagem qualitativa, pois os sujeitos, pesquisador e participantes, estão envolvidos no processo de construção da investigação com toda a sua subjetividade, o seu modo de ser e de viver. Assim, as ações dos indivíduos, o senso comum e seus conhecimentos fazem parte dos dados de análise da pesquisa, como nos esclarece Chizzotti (2008, p.79):

> A abordagem qualitativa parte do fundamento de que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito e o sujeito, uma interdependência viva entre o sujeito e o objeto, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito. O conhecimento não se reduz a um rol de dados isolados, conectados por uma teoria explicativa; o sujeito-observador é parte integrante do processo de conhecimento e interpreta os fenômenos, atribuindo-lhes um significado. O objeto não é um dado inerte e neutro; está possuído de significados e relações que sujeitos concretos criam em suas ações.

Em resumo, podemos dizer que a pesquisa qualitativa prioriza como fonte de coleta de dados o próprio ambiente real onde o sujeito esta inserido, e o pesquisador assume o papel principal de agente em todo o processo.

A análise dos dados foi realizada de forma descritivo-explicativa não utilizando análise estatística. A preocupação neste tipo de pesquisa está voltada para o processo e o seu significado mais do que com o próprio resultado em si, não queremos dizer que este não seja significativo, mas que não é somente o resultado a parte mais importante da pesquisa. Temos que considerar todo o processo e os sujeitos inseridos ao longo deste. Segundo Flick (2009, p. 24):

> O objetivo da pesquisa está, então, menos em testar aquilo que já é bem conhecido (por exemplo, teorias já formuladas antecipadamente) e mais em descobrir o novo e desenvolver teorias empiricamente fundamentadas. Além disso, a validade do estudo é avaliada com referência ao objeto que está sendo estudado, sem guiar-se exclusivamente por critérios científicos teóricos, como no caso da pesquisa quantitativa. Em vez disso, os critérios centrais da pesquisa qualitativa consistem mais em determinar se as descobertas estão embasadas no material empírico, ou se os métodos foram selecionados e aplicados, assim como na relevância das descobertas e na reflexividade dos procedimentos.

Um outro quesito fundamental na pesquisa qualitativa é a ética que deve nortear sua trajetória. Desta forma nossa pesquisa foi analisada pelo Comitê de Ética institucional antes de ser aplicada, para desta forma garantir a integridade de cada um dos participantes, além de assegurar os padrões éticos das relações dos pesquisadores e os participantes. Segundo Flick (2009, p. 52), essas avaliações de integridade ética devem enfocar três aspectos: a qualidade científica, o bem-estar dos participantes e o respeito à dignidade e aos direitos dos participantes.

Os conceitos sobre função afim e quadrática não eram novos para os participantes, dado que compõem os conteúdos do Ensino Médio e a introdução da disciplina Cálculo 1 do curso de engenharia. Assim, buscamos analisar a apropriação dos referidos conceitos pelos estudantes, ou seja, responder à questão: Os alunos ingressantes do curso de engenharia formaram o pensamento teórico em relação aos conceitos de função afim e de função quadrática?

Os procedimentos metodológicos adotados nesta pesquisa se aproximam dos procedimentos da Engenharia Didática,considerada uma pesquisa experimental, devido ao seu modo de validação. Segundo Michèle Artigue (2009), a engenharia didática surgiu nos anos oitenta numa Escola de Verão de didática realizada na França, buscando responder à necessidade de levar em conta a complexidade da sala de aula em estudos experimentais e à necessidade de pensar as relações entre pesquisa e ação nos sistemas educacionais.

> A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental com base

> em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados: a comparação entre análise *a priori* e análise *a posteriori*. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia [...](ALMOULOUD, 2007, p. 171)

Hoje, segundo a própria Artigue (2009, p.7), "a engenharia didática não é uma metodologia de pesquisa privilegiada, mas ainda é uma ferramenta amplamente utilizada, particularmente para explorar formas de vida que não podem ser observados nos contextos padrão."(tradução nossa). No sentido de ferramenta metodológica é que vamos utilizá-la neste trabalho, na construção da sequência didática[4] e na sua análise.

A Engenharia Didática é muito utilizada em pesquisas que envolvem objetos matemáticos, estudando o processo de ensino e aprendizagem, pois é essencial a interligação entre o plano teórico da racionalidade e o território experimental da prática educativa (PAIS, 2001). A metodologia da Engenharia Didática é divida em quatro fases distintas, mas que se relacionam entre si: análises preliminares, análise a *priori*, experimentação e análise a *posteriori*, que apresentaremos a seguir.

2.4 Fases da pesquisa

2.4.1 Análises preliminares

Inicialmente, fizemos um levantamento de pesquisas mais recentes, envolvendo o ensino de função afim e quadrática nos cursos de engenharias e, num segundo momento, realizamos o estudo teórico sobre as funções e suas relações e sobre os referenciais teóricos, já apresentados anteriormente.

As análises preliminares não consistiram somente da pesquisa bibliográfica, mas, também, incluíram as experiências vivenciadas pela pesquisadora em sala de aula – são oito anos, ministrando aulas nos cursos de engenharias, acompanhando de perto o processo de aprendizagem dos alunos, inclusive as dificuldades por eles apresentadas relacionadas a esse estudo.

[4]"Uma *sequência didática* é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática" (PAIS, 2001, p. 102)

2.4.2 Construção da sequência didática e análise a priori

Nesta fase, elaboramos a *sequência didática*, ou seja, as situações-problema que foram trabalhadas durante o desenvolvimento da pesquisa. Partimos do pressuposto de que o papel do professor é o de organizador das tarefas de ensino; suas intervenções devem ser feitas de maneira a promover a participação do aluno no processo de ensino e aprendizagem.

Desta forma,foi nessa fase que pensamos as ações e as tarefas a serem realizadas pelos estudantes de acordo com os objetivos a serem atingidos. Foram pensadas, ainda, as condições para a realização do experimento, os recursos a serem utilizados, o tempo disponível para aplicação da sequência didática, pois esse é um fator que influenciou na definição do número de tarefas a serem desenvolvidas.

Realizamos, ainda, nesta fase, a análise *apriori,* cujo objetivo foi identificar as diferentes variáveis sobre as quais podíamos exercer algum tipo de controle, como as possíveis estratégias e soluções, as possíveis dificuldades, os recursos a serem utilizados.Devemos salientar que a forma como essa fase foi realizada, foi determinante para a qualidade dos resultados da pesquisa, porque essa análise envolveu uma análise matemática e também didática.Basearam-se no referencial teórico, nas análises preliminares e na experiência da pesquisadora.

Na análise matemática, buscamos identificar as estratégias de resolução de resolução de cada situação-problema, destacando os conhecimentos matemáticos envolvidos, e, na análise didática,estabelecer os objetivos das situações propostas, o que traduz a pertinência do proposto com os conhecimentos previamente adquiridos pelos alunos, estabelecer as variáveis a serem controladas e prever as possíveis dificuldades.

A sequência didática é composta de dez situações-problema[5], sendo cinco referentes ao conteúdo de função afim e as outras cinco relativas à função quadrática. As situações-problema foram fundamentais para a pesquisa, pois as informações que foram obtidas a partir delas é que constituíram a nossa maior fonte de análise. Elas foram pensadas de tal forma que incluíssem contextos diversos de exploração dos conceitos, construção e análise de gráficos, o análises dinâmicas por meio do software *Winplot,*e que permitissem a identificação de evidências de apropriação do pensamento teórico dos conceitos envolvidos. Foram apresentadas de forma impressa, com espaços para que os alunos fizessem os seus

[5] "Entendemos por situações-problema a escolha de questões abertas e/ou fechadas numa situação mais ou menos matematizada, envolvendo um campo de problemas colocados em um ou vários domínios de saber e de conhecimentos". (ALMOLULOUD, 2007, p. 174)

registros e realizadas no laboratório de informática, de modo a permitir a utilização do software *Winplot* para a construção de gráficos,que, após elaborados, foram enviados por e-mail ao pesquisador.

A análise *a priori* foi feita para cada uma das situações-problema, porém para facilitar para o leitor, preferimos apresentá-la, assim como a situação-problema, nos capítulos em que fizemos a análise a posteriori, a partir dos dados obtidos.

2.4.3 Experimentação

É a fase de aplicação da sequência didática e de registro pelos alunos e também pelo pesquisador. Também foi necessária a utilização de e-mail, pois os alunos precisaram enviar as cópias das telas das atividades realizadas do software *Winplot*. Utilizamos como fonte de registro para coleta de dados também a gravação em áudio.

A pesquisa foi realizado em três aulas, cada uma correspondendo a uma hora e quarenta minutos. Estamos utilizando o termo aula como referência de tempo, pois a aplicação da atividade de estudo aconteceu durante o horário de aula dos próprios alunos. Como a maioria dos alunos trabalham, não era possível realizar a pesquisa em outro horário.

Depois de dividirmos a turma em dois grupos de 30 alunos cada uma, os 30 alunos que formaram o primeiro grupo foram agrupados em duplas, pois o laboratório dispõe de 15 computadores. Quando da realização das tarefas do segundo grupo, como era final do semestre, o professor não pode disponibilizar o número de aulas necessárias para a realização de todas as atividades.

Assim, apesar do segundo grupo ter realizado algumas das tarefas, não analisamos os dados obtidos, pois além de não termos todos os dados, os do primeiro grupo já representavam um grande volume de informações. Devido a esse grande volume de dados obtidos do primeiro grupo optamos por não analisarmos de todas as 15 duplas, analisamos os dados referentes a 6 duplas, que foram escolhidas de forma aleatória, e para cada uma foi disponibilizado um gravador de áudio.

Esses alunos já haviam estudado os conceitos de função afim e quadrática envolvidos na pesquisa durante o ensino médio e também já haviam realizado uma revisão deles na disciplina em curso.

1ª aula: Ocorreu no dia 20 de maio de 2013. Inicialmente, me apresentei aos alunos como pesquisadora e detalhei todo o projeto de pesquisa. Expliquei que se sentissem à vontade para participar, assim como poderiam deixar de fazê-lo a qualquer momento em que desejassem, sem nenhum prejuízo. Deixei claro também que a pesquisa seria gravada em áudio, mas que a identidade de cada aluno seria preservada. Essa gravação aconteceria com algumas duplas e os gravadores seriam espalhados na sala de forma aleatória.

Todos os alunos presentes assinaram o Termo Consentimento Livre e Esclarecido. Depois da assinatura,aplicamos um questionário contendo algumas perguntas de múltipla escolha com o objetivo de identificarmos o perfil dos alunos.

Em seguida, realizamos uma pequena explanação sobre algumas ferramentas do software *Winplot* que estaria sendo utilizado. Começamos a aplicar as tarefas relacionadas ao conteúdo de função afim, explicando seu objetivo e que o registro deveria ser realizado por escrito no espaço destinado à resolução e os registros com o recurso computacional deveriam ser salvos para posterior envio. Deixamos claro, também, que no enunciado das situações-problema estavam as instruções necessárias e o passo-a-passo para o desenvolvimento de cada uma delas, mas que qualquer dúvida estaria à disposição para esclarecimentos.

A pesquisadora assumiu o papel de orientadora da realização da sequência didática,explicando o início de cada uma e realizando intervenções individuais em cada dupla, quando necessárias, levando o aluno a refletir sobre os conceitos enfocados nas atividades.

A parte da sequência didática referente à função afim é composta de cinco situações-problema e os alunos não conseguiram terminá-las na primeira aula.

2ª aula: No dia 22 de maio de 2013, **i**niciamos a segunda parte de aplicação da sequência didática, terminando as tarefas de função afim, a maioria dos alunos já estavam na tarefa três ou quatro. Conforme as duplas terminavam as situações-problema sobre função afim, já recebiam a segunda etapa da sequência didática, correspondente à função quadrática. A própria tarefa em si é auto instrutiva, pois já indicava quais os comandos do software *Winplot* seriam utilizados. O objetivo desta situação-problema é explorar como estão os conhecimentos dos alunos em relação às representações gráficas e algébricas, utilizando o recurso computacional e também o registro em folha de forma manual. Os alunos não conseguiram terminar as situações-problema de função quadrática até o final deste dia.

3ª aula: No dia 23 de maio de 2013, foi a última etapa para o desenvolvimento das situações-problema de funções quadráticas. Os alunos não demonstraram muito interesse neste dia, terminando de forma muito rápida as tarefas que ainda faltavam. Depois de uma hora na sala estavam somente quatro duplas.

2.4.4 Análise a posteriori

Consiste no tratamento das informações coletadas e dos dados obtidos pela aplicação da sequência didática. É uma fase de validação do experimento. Essa validação ocorre de forma interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada, a partir da confrontação da análise *a priori* e *a posteriori*, como também no diálogo com o referencial teórico. Essa análise será descrita nos próximos capítulos.

2.5 O recurso computacional utilizado: o *software* Winplot

O software *Winplot* foi desenvolvido por volta de 1985 pelo professor Richard Parris, da Philips Exeter Academy. Inicialmente foi escrito em linguagem de programação C e denominado de *PLOT*, mas em 2001 surgiu uma nova versão para o Windows 98, na qual foi utilizada a linguagem de programação C^{++}.Este software possuía versão em seis idiomas. A versão para o português foi traduzida pelo professor Adelmo Ribeiro de Jesus da Universidade Federal da Bahia.

A versão desse *software* é *freeware*, isso significa que os alunos possuem livre acesso para realizar o *download* o que facilita a sua utilização. Outra vantagem é a de não precisar compreender a linguagem de programação, pois utiliza a linguagem usual da matemática para fornecer os comandos das funções no software.

O *Winplot* é um programa computacional gráfico que nos permite construir o sistema gráfico em duas e três dimensões, utilizando diversos tipos de equações, como: implícitas, explícitas, paramétricas, polar e outras.

Há vários sites disponíveis aos quais podemos encontrar o *Winplot* para realizar o seu *download.* No *site*: http://math.exeter.edu/rparris/*Winplot*.html, podemos encontrar várias versões para download.

2.5.1 Conhecendo o programa Winplot

Depois de instalado o programa, a sua tela principal é a seguinte:

Figura 12: Tela principal do *Winplot*.
Fonte: Programa *Winplot*.

Como nossa pesquisa está embasada nos conteúdos de funções afim e quadrática, devemos trabalhar com a construção gráfica em duas dimensões. Desta forma, devemos escolher a opção 2 –dim no menu Janela:

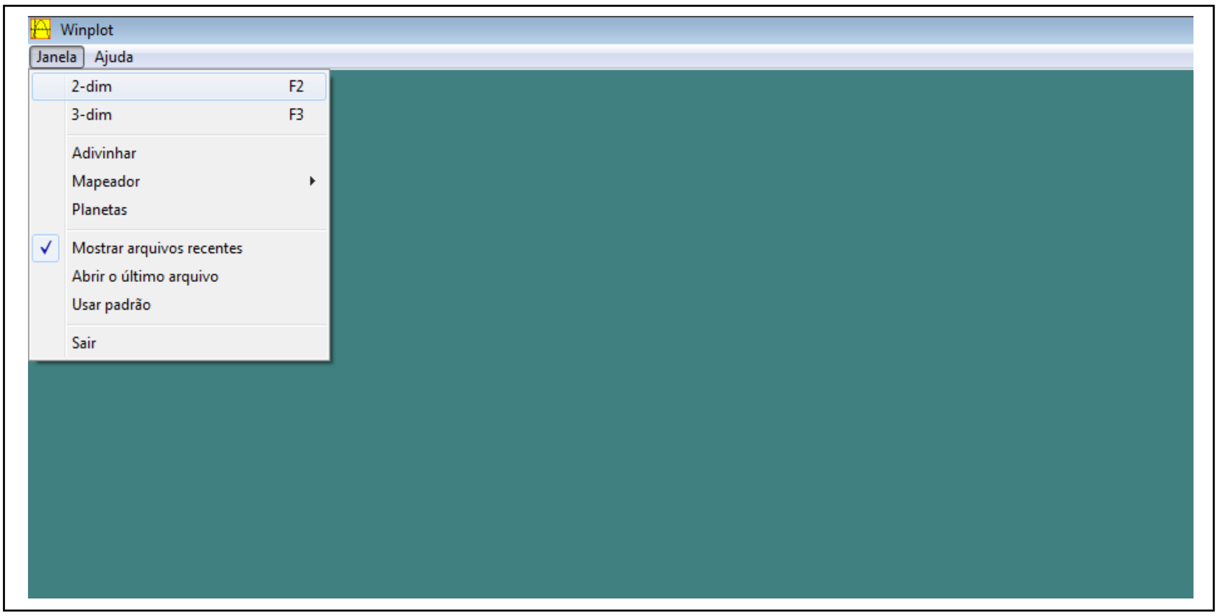


Figura 13:Tela do *Winplot* (2 - dim).
Fonte: Programa *Winplot*.

Depois de selecionar a opção 2-dim, aparecerá o sistema cartesiano que permite a plotagem de gráficos:

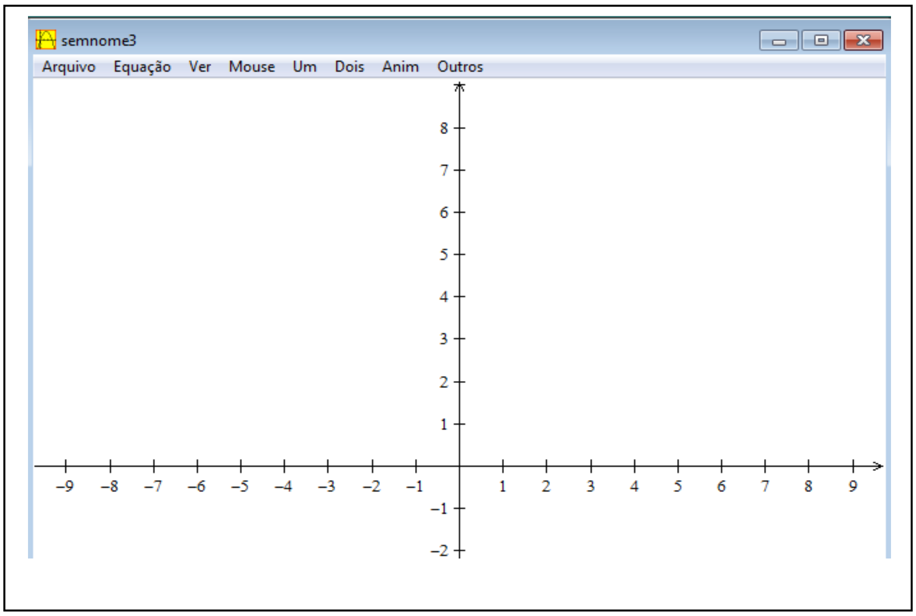


Figura 14:Tela do *Winplot* – Plano Cartesiano.
Fonte: Programa *Winplot*.

Para representar a plotagem gráfica, devemos selecionar o menu*equação,* e, em seguida, escolher a equação desejada. No nosso caso, estaremos trabalhamos com as equações na sua forma explícita. Após este passo abrirá ao lado uma nova janela, na qual deveremos digitar a função desejada e clicar em ok.

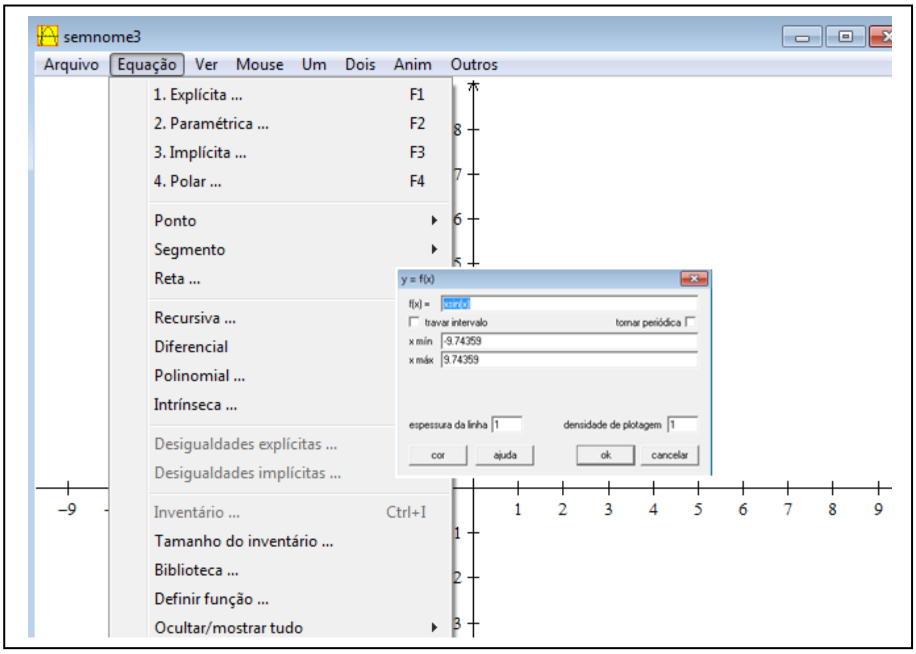


Figura 15: Tela do *Winplot* - Plotagem do gráfico.

Fonte: Programa *Winplot*.

2.6 Perfil dos pesquisados

No primeiro dia da pesquisa foi aplicado um questionário, cujo objetivo era conhecer o perfil dos alunos. Os dados apresentados são referentes aos alunos selecionados para a análise. Como já explicamos anteriormente, o grupo de 30 alunos foi dividido em duplas, e seis gravadores foram distribuídos aleatoriamente para seis delas. Os dados dessas seis duplas foram tomados para análise.

A turma em geral é composta por alunos na faixa etária de 17 a 25 anos, a média dos alunos é de 21,92 anos, portanto são jovens que deixaram há pouco o ensino médio. Ao longo dos anos trabalhados nos cursos de engenharias, temos observado quea demanda está constituída cada vez mais por jovens. Até pouco tempo o perfil dos alunos dos cursos de engenharia era o de pessoas com mais idade e já inseridas no mercado de trabalho.

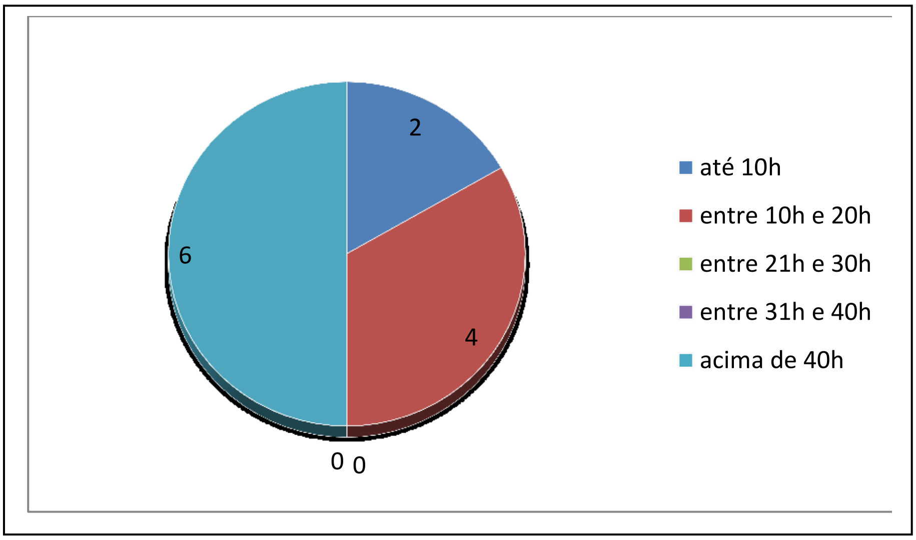


Figura 16:Número semanal de horas trabalhadas.

Por se tratar de cursos noturnos, todos os alunos trabalham, sendo que a metade deles trabalha mais de 40 horas por semana. Esse fato, com certeza, interfere na dedicação dos alunos ao estudo e nas aprendizagens construídas.

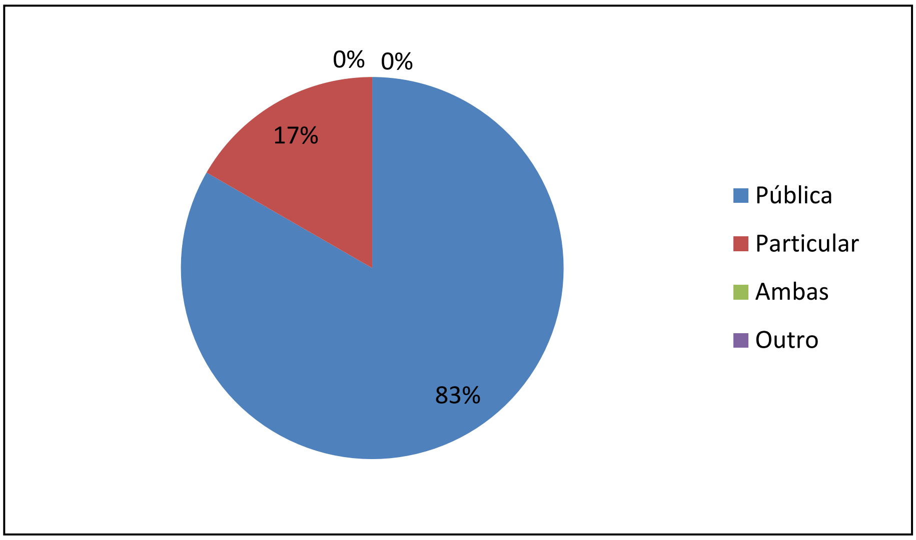


Figura 17: Tipo de estabelecimento no qual cursou o Ensino Médio.

A maioria dos alunos advém de escolas públicas, cujas avaliações sistêmicas, como ENEM, SAEB, dentre outras, têm mostrado um baixo nível de conhecimento em matemática, o que afeta as aprendizagens no curso superior. Além disso, é muito pouco o tempo destinados aos estudos pelos alunos, podemos perceber que a maioria estuda somente nos finais de semana ou nas vésperas das atividades avaliativas.

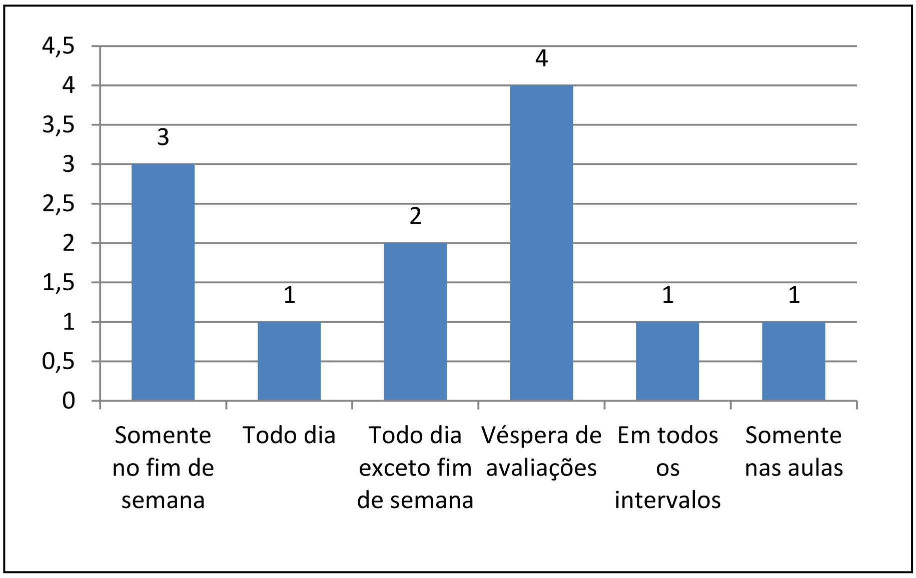


Figura 18: Distribuição do tempo destinado ao estudo pelos alunos.

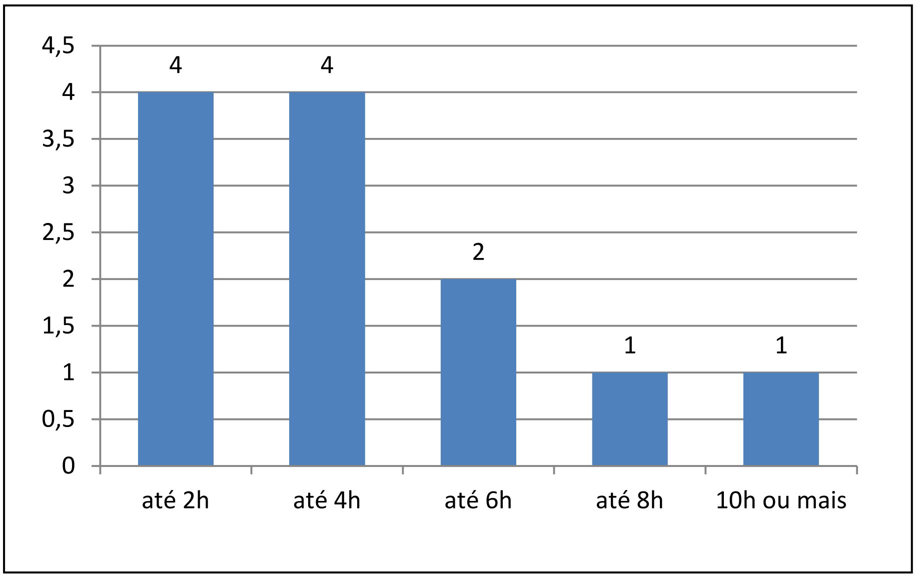


Figura 19: Distribuição semanal das horas destinadas ao estudo.

No que se refere ao tempo destinado aos estudos, observa-se que grande parte dedica até 4 horas semanais,ou até menos de 2. Em média, quatro horas, não considerando o tempo em que estão na faculdade.

Raros são os que estudam todos os dias e muitos estudam apenas às vésperas de provas. É um tempo escasso de dedicação aos estudos para um aluno de curso superior, especialmente, nos cursos de engenharia que têm um ciclo básico que exige bastante.

O próximo capítulo apresenta as análises realizadas sobre o conteúdo de função afim, sendo apresentadas as cinco situações-problema proposta são aos alunos. Apresentamos a análise de todo o conteúdo da seguinte forma: objetivo da tarefa, situação - problema, análise a *priori*, resposta esperada pelos alunos e análise a *posteriori*, a partir dos registros feitos.

CAPÍTULO 3 –ANÁLISE DOS RESULTADOS: A APROPRIAÇÃO DA FUNÇÃO DO AFIM

Neste capítulo, analisamos a sequência didática composta de cinco situações-problema referentes ao conteúdo de função afim. A análise será constituída de duas partes integradas, ou seja, no primeiro momento está a análise *a priori* e no segundo momento a análise *a posteriori*, sendo uma seguida da outra. Apresentamos também a atividade e os seus objetivos, para que o leitor possa acompanhar melhor o que está sendo relatado e analisado

3. 1 Análise da situação-problema1

*Objetivo:*Permitir a aplicação do conceito da função afim a uma situação problema. Ampliar o conceito de função afim. Generalizar a lei de formação de uma função afim a partir de uma situação problema.

Situação-problema: Um estudante de engenharia da 1ª etapa deseja comprar um entre dois carros usados. Ao pesquisar preços e benefícios que o carro possui, encontrou as seguintes propostas: o carro A custa R$ 5 000,00 e faz 8,4 quilômetros por litro de gasolina, enquanto o carro B custa R$ 7 000,00 e faz 12 quilômetros por litro. A gasolina custa R$ 2,80 o litro. Ambos os carros estão em boas condições, portanto espera–se que o custo de consertos seja desprezível em médio prazo. Considerando esses dados, responda:

Tarefa 1.1: Sem realizar cálculos, qual carro você aconselharia o seu colega a comprar?

*Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução:*O aluno para responder este item não deve realizar cálculos, assim deve escolher um entre os dois carros disponíveis, considerando que o carro A custa dois mil reais a menos que o carro B, mas deve levar em consideração, também,que o carro A faz 8,4 quilômetro por litro de gasolina e o carro B faz 12 quilômetros por litro de gasolina. Desta forma, o aluno deve optar pelo carro B, levando-se em consideração que ele faz 12 quilômetros com o litro de gasolina, mesmo sendo dois mil reais a mais que o carro A.
*Resposta esperada:*Carro B

Resposta encontrada pelos alunos para a Tarefa 1.1

Resposta	Sujeitos
Carro B	Grupo 1
Carro B	Grupo 2
Carro B	Grupo 3
Carro B	Grupo 4
Carro B	Grupo 5
Carro B	Grupo 6

Análise a posteriori: Todos os alunos chegaram à mesma conclusão, dando a resposta correta. Trata-se de uma questão em que os conhecimentos espontâneos permitiriam resolver. De forma geral, todos discutiram entre si para chegar à conclusão da resposta, mesmo quando algum dos membros da dupla não concordava, o outro companheiro tentava argumentar até chegarem à conclusão definitiva. Segue abaixo a transcrição do diálogo de uma das duplas, pois o das demais duplas são muito parecidos:

Sujeitos da dupla	Diálogos
S1	O carro A ele custa menos, mais ele também faz menos km por litro, o carro B já custa mais, mas faz mais km por litro, a gasolina custa 2,80
S2	Vamos supor que...
S1	Vai dar 84 reais
S2	É melhor o carro A
S1	Eu discordo você paga 5000 no carro, mas tipo o que você economiza no carro tem que por de gasolina, se você compra o de 7000, você anda um pouco mais.
S2	É esse aqui é mais barato, mas anda menos esse aqui é mais caro, mais nada mais.
S1	Se em 1 litro ele faz 8,4 km
S2	Tá vendo deu mais caro.
S1	Tipo, 1 litro custa 2,80; ele anda 8,4 km; então
S2	Mas ele tá pedindo por litro rodado, por km rodado, a gente pois o total, não apaga não, porque se 8,4 faz esse tanto. 1 km faz quanto?
S1	Vamos passar pro outro.
S2	Não adianta, voltando.
S1	Tá, o custo do combustível pro carro A. Se 8,4 ....
S2	Eu fiz assim o..
S1	Mas pensa, tá certo, porque 8,4; é o km e 2,80 litro de gasolina, em 1km quanto. Tá vendo que compensa mais o B.

Tarefa 1.2: Qual é o custo do combustível por quilômetro rodado para o carro A e para o carro B?

Análise a priori:estratégia dos alunos prevista para a resolução: Para o aluno descobrir o custo do combustível por quilômetro rodado, precisa saber quanto cada carro gasta de combustível em um quilômetro. Por exemplo, o carro faz 8,4 quilômetros por litro de gasolina, assim quando dividimos um litro de gasolina por 8,4 quilômetros, encontramos como resultado 0,119 litro. Esse resultado indica que, para um quilômetro, o carro A gasta 0,119 litros de combustível. O mesmo procedimento deve ser realizado para o carro B, a única diferença é que o carro B faz 12 quilômetros por litro de gasolina. É um tipo pergunta em que os alunos vão encontrar dificuldade em interpretá-la. O aluno pode resolvê-la de uma forma incorreta, multiplicando o preço da gasolina que custa R$ 2,8 pelo quilômetro rodado de cada um dos carros.

Resposta esperada:

Carro A	Carro B
$\frac{1}{8,4} = 0,119l$	$\frac{1}{12} = 0,0833l$
$0,119l \times 2,8 = 0,3332$ reais	$0,0833l \times 2,8 = 0,2333$ reais

Resposta encontrada pelos alunos da Tarefa 1.2

Resposta	**Sujeitos (S)**
Carro A - 2,8 : 8,4 = 0,33 Carro B - 2,8 : 12 = 0,23	Grupo 1
Carro A - 2,8 : 8,4 = 0,33 Carro B - 2,8 : 12 = 0,23	Grupo 2
Carro A - 2,8 : 8,4 = 0,33 Carro B - 2,8 : 12 = 0,23	Grupo 3
Carro A - 0,33 Carro B - 0,23	Grupo 4
Carro A - 2,8 : 8,4 = 0,33 Carro B - 2,8 : 12 = 0,23	Grupo 5
Carro A - 2,8 : 8,4 = 0,33 Carro B - 2,8 : 12 = 0,23	Grupo 6

Análise a posteriori: Para a resolução deste item, os alunos utilizaram uma estratégia não prevista pela pesquisadora na análise *a priori*. Neste caso, os alunos dividiram o preço do litro da gasolina pela quantidade de quilômetros rodados com um litro de gasolina. Cinco dos grupos resolveram utilizando este processo, mas um grupo colocou somente a resposta. Analisando a gravação de áudio deste grupo, também não ficou claro o processo utilizado para chegar a resposta. Trata-se também de uma questão que não depende do conceito teórico da função afim.

Tarefa 1.3: Preencha a tabela a seguir de acordo com o valor, em reais, do custo (com combustível e valor do carro) gasto por quilometro rodado. Registre uma expressão matemática que corresponda aos cálculos que você realizou e, não apenas o resultado. Em seguida, tente encontrar uma lei de formação que generalize o valor, em reais, do custo, para os carros A e B por quilômetro rodado.

Km rodado	Carro A	Carro B
1		
2		
3		
4		
X		

Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução. A tabela desta atividade para ser preenchida precisa do resultado do item anterior, assim, se o aluno errar o resultado anterior, não irá conseguir generalizar a lei de formação do valor, em reais, dos custos incluindo o valor do carro e o gasto com combustível para cada carro. Desta forma,para encontrar o valor, é necessário somar o valor pago inicialmente pelo carro mais a quantidade de quilômetros rodados multiplicada pelo valor do litro de combustível encontrado no item 1.2 para cada carro.

Resposta esperada:

Km rodado	Carro A	Carro B
1	$5000+0,3332=5000,3332$	$7000+0,2333=7000,2333$
2	$5000+2\times 0,3332=5000,6664$	$7000+2\times 0,2333=7000,4666$
3	$5000+3\times 0,3332=5000,9996$	$7000+3\times 0,2333=7000,6999$
4	$5000+4\times 0,3332=5001,3328$	$7000+3\times 0,2333=7000,6999$
X	$5000+0,3332x$	$7000+0,2333x$

Lei de formação A: Lei de formação B:

$y=5000+0,3332x$ $y=7000+0,2333x$

Resposta encontrada pelos alunos Tarefa 1.3:

Resposta			**Sujeitos (S)**
km rodado	**Carro A**	**Carro B**	Grupo 1
1	5000 + 0,33 = 5000,33	7000 + 0,23 = 7000,23	
2	5000 + 0,66 = 5000,66	7000 + 0,46 = 7000,46	
3	5000 + 0,99 = 5000,99	7000 + 0,69 = 7000,69	
4	5000 + 1,32 = 5001,32	7000 + 0,92 = 7000,92	
x	U = 5000 + 0,33x	U = 7000 + 0,23x	
km rodado	**Carro A**	**Carro B**	Grupo 2
1	1 . 0,333 + 5000 = 5000,333	1 . 0,233 + 7000 = 7000,233	
2	2 . 0,333 + 5000 = 5000,666	2 . 0,233 + 7000 = 7000,466	
3	3. 0,333 + 5000 = 5000,999	3 . 0,233 + 7000 = 7000,699	
4	4. 0,333 + 5000 = 5001,332	4 . 0,233 + 7000 = 7000,932	
x	y = x . 0,333 + 5000	Y = x . 0,233 + 7000	
km rodado	**Carro A**	**Carro B**	Grupo 3
1	0,333	0,233	
2	0,666	0,466	
3	0,999	0,6999	
4	1,332	0,932	
x	0,333 . x	0,233 . x	
km rodado	**Carro A**	**Carro B**	Grupo 4
1	2,8 : 8,4 x 1 = 0,33 5000 + 0,33 = 5000,33	2,8 : 12 x 1 = 0,23 7000 + 0,23 = 7000,23	
2	2,8 : 8,4 x 2 = 0,66 5000 + 0,66 = 5000,66	2,8 : 12 x 2 = 0,46 7000 + 0,23 = 7000,46	
3	2,8 : 8,4 x 3 = 0,99 5000 + 0,33 = 5000,33	2,8 : 12 x 3 = 0,69 7000 + 0,23 = 7000,69	
4	2,8 : 8,4 x 4 = 1,32 5000 + 0,33 = 5001,32	2,8 : 12 x 4 = 0,92 7000 + 0,23 = 7000,92	
x	2,8 : 8,4 x 1500 = 495 5000 + 495 = 5495	2,8 : 12 x 1500 = 345	
km rodado	**Carro A**	**Carro B**	Grupo 5
1	5000 + 0,333 = 5000,333	7000 + 0,233 = 7000,233	
2	5000 + 0,666 = 5000,666	7000 + 0,466 = 7000,466	
3	5000 + 1 = 5000,1	7000 + 0,7 = 7000,7	
4	5000 + 1,333 = 5001,333	7000 + 0,933 = 7000,933	

x	$5000+\frac{2,8}{8,4}x$	$\frac{7000+2,8x}{12}$	
km rodado	**Carro A**	**Carro B**	Grupo 6
1	0,333	0,233	
2	0,666	0,466	
3	0,999	0,6999	
4	1,332	0,932	
x	Y = 0,333x + 5000	Y = 2,33x + 7000	

Análise a posteriori: Este exercício foi pensado como geralmente os livros, e, nós, professores, trabalhamos em sala de aula, ou seja, trabalhamos de forma a conduzir o aluno a pensar em casos particulares e depois chegar a um caso de generalização. Mas, pelas respostas fornecidas pelos alunos percebemos que os grupos encontraram dificuldades para chegar à generalização. Os alunos também apresentaram dificuldades em trabalhar com a linguagem formal da matemática, não representando as funções trabalhadas na forma y =ax + b.

Somente os grupos 1 e2 conseguiram utilizar a linguagem matemática e generalizar, escrevendo uma lei de formação, sendo que o grupo 1 utilizou letra U, para a variável independente, ao invés de y, que é o mais usual. Já o grupo 3 não apresentou total domínio do processo de generalização e compreensão do exercício. O grupo 4 conseguiu resolver os casos particulares, mas não compreendeu o processo de generalização e não conseguiu escrevera lei de formação. Pela gravação, observamos que não demonstraram o processo de raciocínio utilizado. O grupo 5 conseguiu realizar o processo de particularização para cada quilômetro rodado, mas não utilizou a variável independente para representar a generalização da função para o carro, embora tenham expressado de maneira interessante o coeficiente de x.Para a função do carro B, dividiram toda a expressão por 12. O grupo 6 não conseguiu desenvolver os casos particulares, ou seja, determinar o valor dos gastos com o combustível e o valor do carro.Há indícios de que não entenderam a tarefa, embora os diálogos demonstrem que eles perceberam a existência de coisas que variam e de outra que não varia, importante no conceito de função.Mas, determinaram a generalização da função com a intervenção do professor, mesmo assim não voltaram para corrigir, na planilha, os valores para cada quilômetro rodado. Segue uma pequena parte da transcrição do diálogo desta dupla para melhor compreensão de suas dificuldades:

Sujeitos do Grupo 6	Diálogos
S1	0,33 x 0,33; 2km , é 0,33 x 2; depois $0,33^2$ X é os km rodados e Y é o custo ; 0,33; 1km dá isso, 2 dá isso e 4 dá isso.
S2	É a lei de formação 2,80X , mas qual é o fixo; 0,333X + ...é porque se aquela lá é a lei de formação, essa é a variável.
S1	0,33 é móvel
S2	O Y tem que achar e a lei de formação também. 0,33, sempre; 2 x 0,33; 3 x 0,33; então 0,33 é o fixo entendeu? E os Km rodados vezes 0,33; os km rodados eu sei que é o X, o Custo é o Y.
S1	Tem que acha o Be o M.
S2	Você tá viajando
S1	É a lei de formação
S2	Ela pediu a lei de formação, que é isso, a equação 1°grau, ...precisa de achar a lei de formação pra faze isso aqui.
S1	Pergunta se ta certo.
S2	Aqui você não acha o gasto por km rodado

Essa situação nos leva a inferir que a passagem dos casos particulares para o geral não é simples, neste tipo de situação, mesmo estando desenvolvendo questões com alunos do ensino superior que deveriam ter um maior desenvolvimento das capacidades psíquicas superiores.

Tarefa 1.4: Analise o gráfico abaixo, que representa quilômetros rodados por gasto (com combustível e custo de compra do carro) e determine quantos quilômetros o estudante de engenharia deve rodar antes que o carro B se torne a melhor compra.

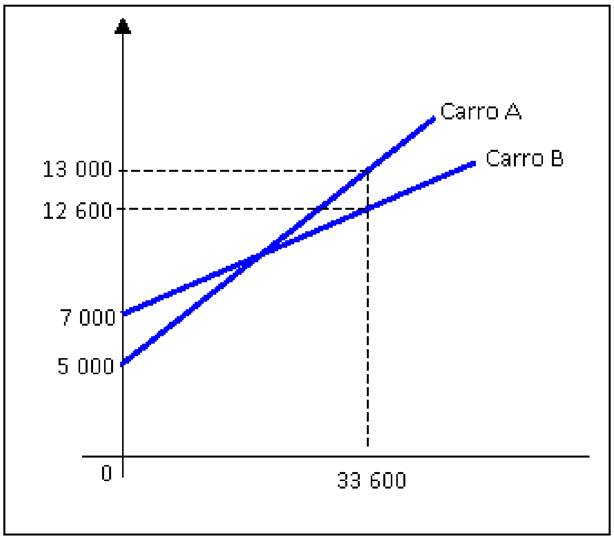


Figura 20:Gráfico do item 1.4

Anote seus registros, quais recursos você utilizou para chegar a sua resposta.

Análise a priori :estratégia dos alunos prevista para a resolução: Com base nas leis de formação encontradas na tarefa 1.3, o aluno consegue determinar quantos quilômetros o estudante de engenharia deve rodar antes que o carro B se torne a melhor opção.Para isso, deve igualar ambas as equações. Outra forma de resolução que o aluno pode utilizar, é atribuir valores para a variável x encontrando os valores da variável y, comparando os resultados obtidos e verificando a partir de quais valores o carro B se torna a melhor compra.

Resposta esperada:

$$5000 + 0,3332x = 7000 + 0,2333x$$
$$0,3332x - 0,2333x = 7000 - 5000$$
$$0,999x = 2000$$
$$x = 20020,02$$

Resposta encontrada pelos alunos para a Tarefa 1.4

Resposta	**Sujeitos (S)**
$5000 + 0,33x = 7000 + 0,23x$ $0,33x - 0,23x = 7000 - 5000$ $0,10x = 2000$ $x = \frac{2000}{0,1}$ $x = 2000$ Ele deve rodar 20000 km até que o carro B se torne a melhor compra.	Grupo 1
$y_A = y_B$ $0,333x + 5000 = 0,233x + 7000$ $0,333x - 0,233x = 7000 - 5000$ $0,1x = 2000$ $x = \frac{2000}{0,1} = 2000$	Grupo 2
$0,333x + 5000 = 0,233x + 7000$ $0,333x - 0,233x = 7000 - 5000$ $0,1x = 2000$ $x = \frac{2000}{0,1} = 20000$	Grupo 3

A : 20000 x 0,33 = 6600 + 5000 = 11600 B: 20000 x 0,23 = 4600 + 7000 = 11600 20000 Km é o ponto de equilíbrio	Grupo 4
O carro A deve rodar 34600 quilômetros.	Grupo 5
$5000+0,33x=7000+0,23x$ $0,33x-0,23x=7000-5000$ $0,10x=2000$ $x=\frac{2000}{0,1}$ $x=2000$ A Partir de 20000 km rodados.	Grupo 6

Análise a posteriori: A maioria seguiu o previsto na estratégia que era igualar ambas as equações. As intervenções do pesquisador nas duplas foram realizadas, conforme os alunos solicitassem. O grupo 4 chegou à conclusão correta, mas não deixou claro o processo de resolução, inclusive no áudio. O grupo 5 quase não comentou quais procedimentos utilizou para resolver as atividades e não compreendeu a tarefa.

Tarefa1.5: Depois de todas as resoluções feitas nos itens anteriores, e com as conclusões que realizou. Volte a sua resposta no item 1.1, e responda se você continuaria a indicar o mesmo carro para o seu colega comprar? Por quê?

*Análise a priori :estratégia dos alunos prevista para a resolução.*O aluno irá concluir com base em todas as análises feitas nos tópicos anteriores, que o carro B se torna a melhor opção a partir de 20.020 km. Mas, se for um aluno que possui conceitos mais apurados acerca da realidade, irá discutir que um carro com 20.020 km rodados já não é um carro muito novo, assim precisa comparar com o carro A, observando a quilometragem rodada, para verificar se realmente o carro B é a melhor opção para indicar.

*Resposta esperada:*O aluno deve concluir que o carro B é mais econômico, a partir de 20.020 km e, portanto, é o que deve ser indicado.

Resposta encontrada pelos alunos para Tarefa 1.5

Resposta	Sujeitos (S)
Sim, porque a partir de 33600 km rodado, ele gastará menos no valor do combustível.	Grupo 1
Sim, pois o carro B vai sair mais barato após 20000 km rodado.	Grupo 2
Sim, pois o carro B é o mais econômico, o carro A é mais barato, porém gasta mais gasolina.	Grupo 3
Analisando sem utilizar cálculo por intuição escolhemos o carro B. Analisando matematicamente conforme o item 1.4 chegamos numa conclusão que a opção do carro A é mais viável.	Grupo 4
Sim. Ele ainda é mais econômico.	Grupo 5
Sim. Pelo fato de a médio prazo ambos os carros não precisarem de reparos mecânicos e sendo assim o carro B com 20000 km rodados ainda será a melhor opção.	Grupo 6

Análise a posteriori: Os grupos, de forma geral, chegaram à mesma conclusão de que o carro B continua a ser o mais econômico a partir de 20.000 km rodados aproximadamente, conforme resposta prevista na análise *a priori*. Porém, o grupo 4 deixou como resposta que o carro A seria mais viável, mas analisando as gravações de áudio, percebemos que conseguiram chegar no valor de 20.000 km, com algumas intervenções. Mas, na resposta entregue por escrito no papel não realizaram a alteração.

3. 2 Análise da situação-problema 2

Objetivo da tarefa: Permitir a aplicação do estudo da função afim a uma situação problema. Ampliar o conceito de função afim. Escrever a lei de formação de uma função afim a partir de uma situação problema. Identificar qual a abordagem pedagógica que mais favorece a resolução da situação problema - por meio do *Winplot* ou sem o seu uso.

Situação-Problema: Em um dos encontros presenciais de seu curso de Engenharia, você descobre que seu colega possui uma vídeo–locadora. E fica muito feliz, pois ele propôs fazer para a turma uma super promoção. Na realidade, seu colega trouxe três promoções, e agora você precisa analisar as propostas:

- Promoção I: R$ 20,00 de taxa de adesão anual, mais R$ 1,2 por DVD alugado;
- Promoção II: R$ 10,00 de taxa de adesão anual, mais R$ 2,0 por DVD alugado;
- Promoção III: R$ 3,00 por DVD alugado, sem taxa de adesão.

Tarefa 2.1: Encontre uma lei de formação que permita determinar o gasto anual de DVD alugados em cada uma das promoções:
Lei de formação – Promoção I:
Lei de formação – Promoção II:
Lei de formação – Promoção III:

*Análise a priori :estratégia dos alunos prevista para a resolução:*para determinar a lei de formação, o aluno deve analisar as condições relativas a cada uma das promoções, identificando as variáveis e o tipo de relação que se estabelece entre elas em cada caso. Desta forma, para aderir à promoção I, deve-se pagar uma taxa fixa de 15 reais mais R$ 1,20 por DVD alugado, assim sua lei de formação será $y = 15 + 1,2x$, considerando x o número de DVD alugados e y o valor total a ser pago, incluindo a taxa fixa. A promoção II cobra uma taxa fixa de 10 reais mais R$ 2,00 por DVD alugado, assim sua lei de formação será $y = 10 + 2x$. E, por último, na promoção III, não há taxa fixa, o cliente somente paga três reais pelo número de DVDs alugados, desta forma, sua lei de formação será $y = 3x$ .Provavelmente, os alunos não sentirão dificuldades em realizar a elaboração das leis de formação, pois se trata de um exercício de fácil interpretação.

Resposta esperada:
Lei de formação – Promoção I: $y = 15 + 1,2x$
Lei de formação – Promoção II: $y = 10 + 2x$
Lei de formação – Promoção III: $y = 3x$.

Resposta encontrada pelos alunos para a Tarefa 2.1

Resposta	**Sujeitos**
Promoção I: 15 + 1,2x Promoção II: 10 + 2x Promoção III: 3x	Grupo 1
Promoção I: y = 15 + 1,2x Promoção II:y = 10 + 2x Promoção III: y = 3x	Grupo 2
Promoção I: 1,2x + 15 Promoção II:2x + 10 Promoção III: 3x	Grupo 3

Promoção I: 15 + 1,2x Promoção II: 10 + 2x Promoção III: 3x	Grupo 4
Promoção I: 15 + 1,2x Promoção II: 10 + 2x Promoção III: 3x	Grupo 5
Promoção I: y = 15 + 1,2x Promoção II:y = 10 + 2x Promoção III: y = 3x	Grupo 6

*Análise a posteriori:*Como previsto na estratégia os alunos não demonstraram dificuldades para determinar a lei de formação, mas a linguagem escrita matemática ainda é deficiente, o que pode revelar também que o pensamento é empírico, pois o conceito de função em estudo exige a existência de duas variáveis. Dos seis grupos, somente dois deles utilizaram a linguagem do tipo y = ax + b, ou seja, indicando a variável independente (y). Esta atividade foi um pouco diferente da desenvolvida no item 1.3, pois já solicitava a generalização da situação de forma direta, sem analisar casos particulares, ou seja, para um DVD, para dois DVD e assim por diante.O fato de já terem realizado a atividade anterior pode ter contribuído para que escrevessem a forma analítica corretamente.

Tarefa 2.2: Vamos testar se as leis que você encontrou estão corretas. Para isso atribua os valores 2, 3 e 4 para x, verificando se os valores que constam na tabela, a qual você irá preencher como no modelo abaixo, são os valores que você encontrou para y. Será uma forma de você verificar se acertou ou não a lei de formação de cada uma das promoções, se você não encontrou os valores fornecidos, volte e verifique a sua lei de formação. Registre a forma como você utilizou para verificar se os valores são equivalentes.

Número de DVD alugados	Promoção I $y = 15 + 1,2x$	Promoção II $y = 10 + 2x$	Promoção III $y = 3x$
2			
3			
4			

Análise a priori :estratégia dos alunos prevista para a resolução: O enunciado do exercício deixou claro o significado de cada um dos termos.Assim, para realizar a conferência da tabela,basta o aluno substituir, em cada uma das leis de formação encontradas no tópico 2.1, os valores correspondentes. Outra forma pela qual o aluno poderia optar é a construção gráfica, mas provavelmente não fará por este processo, pois ainda não foi pedido que ele construísse o gráfico das funções. Assim ele poderia utilizar o software *Winplot*, plotar os pontos e verificar se os mesmos pertencem a cada uma das retas que representam as equações de cada uma das promoções.

Resposta esperada:

Número de DVD alugados	Promoção I $y = 15 + 1,2x$	Promoção II $y = 10 + 2x$	Promoção III $y = 3x$
2	$y = 15 + 1,2 \times 2 = 17,4$	$y = 10 + 2 \times 2 = 14$	$y = 3 \times 2 = 6$
3	$y = 15 + 1,2 \times 3 = 18,6$	$y = 10 + 2 \times 3 = 16$	$y = 3 \times 3 = 9$
4	$y = 15 + 1,2 \times 4 = 19,8$	$y = 10 + 2 \times 4 = 18$	$y = 3 \times 4 = 12$

Resposta encontrada pelos alunos na Tarefa 2.2

Resposta	**Sujeitos**
Promoção 1 y= 15+ 1,2. 2 y= 17,4 y=15+1.2. 3 y= 18,6 y=15+ 1,2.4 y= 19,8 Promoção 2 y=10 + 2.2 y=14 y=10+2 3 y=16 y=10+2 4 y=18 Promoção 3 y= 3. 2 y= 6 y= 3 3 y= 9 y= 3.4 y=12	Grupo 1
I y=15+1,2.2 y=17,4 y=15+1,2.3 y=18,6 y=15+1,2.4 y=19,8 II y=10+2.2 y=14 y=10+2.3 y=16 y=10.2.4 y=18 III y=3.2 y=6 y=3.3 y=9 y=3.4 y=12	Grupo 2
2→ Pro I = 1,2.2 +15,00 = 17,40 Pro II = 2,0 .2+10,00 = 14,00 Pro III = 3,0.2 = 6,00 3→ Pro I = 1,2.3 +15,00 = 18,60 Pro II = 2,0. 3+10,00 = 16,00 Pro III = 3,0 . 3 = 9,00 4→ Pro I = 1,2.4 +15,00 = 19,80 Pro II = 2,0 . 4+10,00 = 18,00 Pro III = 3,0. 4 = 12,00	Grupo 3

I = 15,00 + 1,2 . 2 = 17,4 I = 15,00 + 1,2 . 3 = 18,6 I = 15,00 + 1,2 . 4 = 19,8 II = 10.000 + 2,0 . 2 = 14 II = 10.000 + 2,0 . 3 = 16 II = 10.000 + 2,0 . 4 = 18 III = 3,0 . 2 = 6 III = 3,0 . 3 = 9 III = 3,0 . 4 = 12	Grupo 4
Em branco	Grupo 5
Promoção I = y = 1,2x + 15 DVD → 2 = y = 2,4 + 15 = 17,4 DVD → 3 = y = 3,6 + 15 = 18,6 DVD → 4 = y = 4,8 + 15 = 19,8 Promoção II = 2,0x + 10 DVD 2 = 4 + 10 → 14 DVD 3 = 6 + 10 → 16 DVD 4 = 8 + 10 18 Promoção III DVD 2 = 6 DVD 3 = 9 DVD 4 = 12	Grupo 6

*Análise a posteriori:*Os alunos utilizaram a estratégia prevista na análise *a priori*, não demonstraram nenhuma dificuldade em realizar as substituições e em determinar os valores para cada uma das funções. Apenas o grupo 5 não realizou a tarefa. O uso da linguagem formal da matemática ainda continua em deficiência, pois,os grupos 3, 4 e 6 não escreveram a variável dependente. Para muitos alunos, essa linguagem é irrelevante e sem sentido, ou seja, não compreenderam o conceito estabelecido entre os símbolos e signos utilizados no estudo da função afim. Pode revelar, também, a falta de apropriação da essência do conceito.

Tarefa2.3: Agora, com o auxílio do software *Winplot,* plote o gráfico destas três leis de formação que você encontrou para isso siga as instruções a seguir:

1) Antes de plotar a equação, você precisar mudar o intervalo nos eixos x e y para uma melhor visualização, desta forma, clique na aba *Ver*, e em seguida na opção *Grade*, mude o intervalo de x e y para cinco.
2) Clique na aba Equação, e em seguida escolha a opção *Explícita*.
3) Na opção explícita, digite as equações obtidas, plote cada função de uma cor diferente, automaticamente o *Winplot* irá fazer isso. Você irá plotar os três gráficos

na mesma tela, assim cada vez que digitar uma nova função, o *Winplot* irá plotá-lo de uma cor diferente.

4) Em seguida, marque os valores que você preencheu na tabela, e verifique se cada um desses valores realmente pertencem à reta. Para isso, clique na aba *equação*, em seguida na opção *ponto (x,y)*. Para registro de sua atividade, cole o *print screen* da tela de sua construção gráfica no *Winplot*.

*Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução:*Este é o primeiro exercício em que o aluno estará utilizando o software *Winplot* para realizar a construção gráfica. Considerando que a maioria deles não desenvolve a representação gráfica, utilizando um recurso computacional, provavelmente, encontrarão muitas dificuldades em realizar esta primeira atividade. Desta forma, o exercício traz o detalhamento de quais comandos o aluno deve utilizar para realizar a representação gráfica, além de receberem instruções do professor no primeiro momento e terem acesso a alguns vídeos sobre como utilizar o software. Outra dificuldade que poderão encontrar é que para visualizarem o gráfico, é necessário alterar a escala. Alguns alunos, ainda podem tentar visualizar o gráfico resolvendo de forma manual, atribuindo valores para a variável x e encontrando os valores da variável y, para, posteriormente, tentarem visualizar utilizando o recurso computacional. E para finalizar a atividade devem plotar os pontos do item anterior. Como estamos nos referindo ao número de DVDs alugados essa função deve assumir valores iguais ou maiores do que zero para o seu domínio.

Resposta esperada:

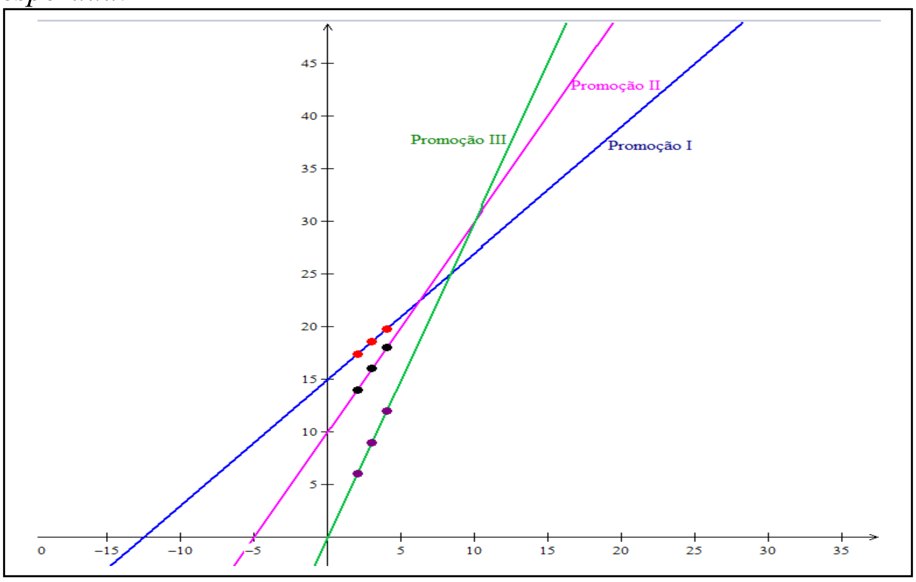
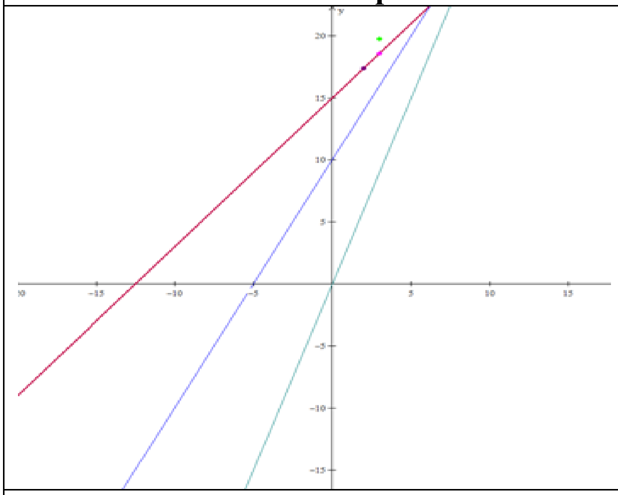
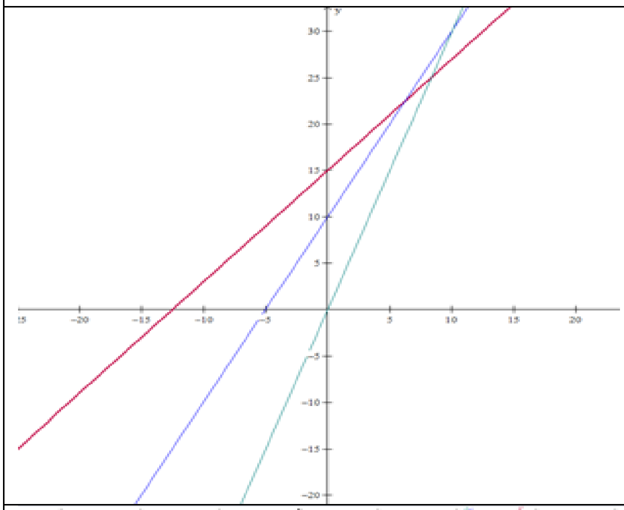
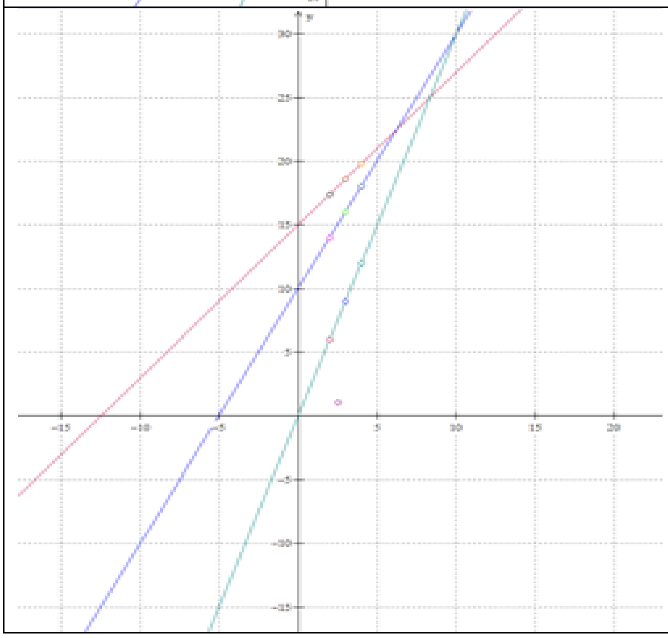
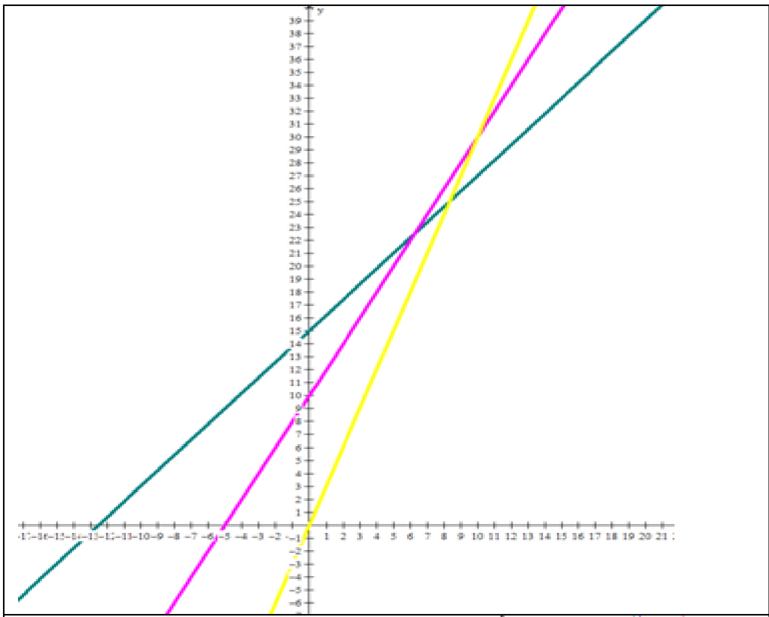
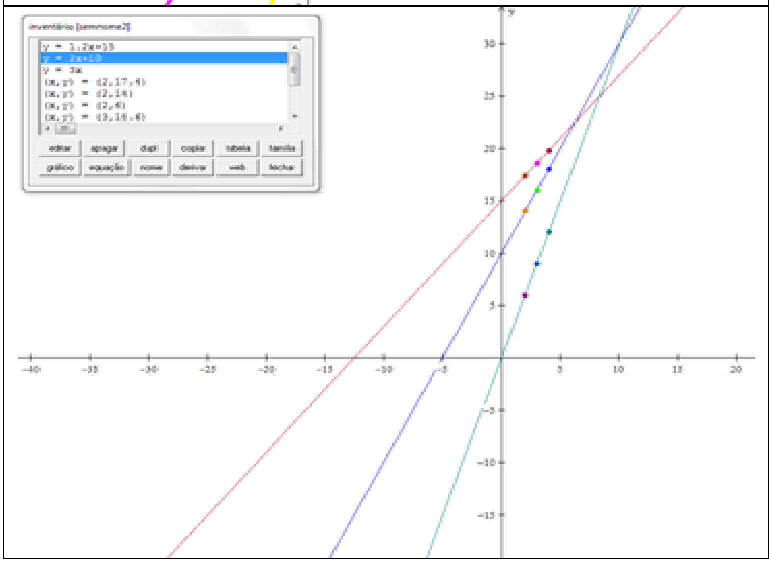


Figura 21: Gráfico do item 2.3

Resposta encontrada pelos alunos na Tarefa 2.2

Resposta	Sujeitos
	Grupo 1
Em branco	Grupo 2
	Grupo 3
	Grupo 4

	Grupo 5
	Grupo 6

*Análise a posteriori:*De forma geral os alunos não apresentaram grandes dificuldades para trabalhar com o software *Winplot*. Tivemos que realizar algumas intervenções com “dicas” sobre como utilizar alguns comandos do *software*. Considerando que os alunos estavam utilizando o *software* pela primeira vez, não apresentaram tanta dificuldade como havíamos previsto. O grupo2deixou a atividade em branco. Os grupos 3 e 5 não fizeram a verificação dos pontos do item 2.2. Os grupos 1, 4 e 6 conseguiram desenvolver de forma completa toda a atividade. No início, parecia algo complicado para os alunos, pois era a primeira atividade em que se pedia a utilização do *Winplot*, depois desta, não realizamos mais intervenção. Segue abaixo um pequeno trecho de uma das duplas para ilustrar o início da atividade:

Sujeitos da dupla	Diálogos
S1	Como é o negocio lá? Aaaa......como é A, explícita aqui não tem o AX
S2	Aaaa....maior que 0, mais você tem que fazer, acho melhor fazer na mão
S1	São 3 pontos diferentes. Aaaa...vamos faze na mão é mais fácil do que isso ai.
S2	Mas como eu vou faze o gráfico, sem esses valores.
S1	Não, vamos fazer o gráfico, aqui nós não estamos usando, 1,2 e 3.
S2	vamos deixar.
S1	Acho que dá pra fazer.
S2	Construa o gráfico das funções usando A=1 e a maior que 0, põem -1
S1	Não, porque o A tem que ser maior que 0, se por -1, ai vai ser menor.
S2	Aqui a gente tem que achar a quantidade de DVD pra achar......tá, nós fizemos aqui.

Podemos perceber pelo diálogo que os alunos no início sentiram dificuldade, mas continuaram tentando. Os alunos não demonstraram dificuldades em trabalhar com a escala no software *Winplot*.Entretanto, nessa situação, a variável só pode assumir valores inteiros não negativos, nenhum grupo atentou para esse fato. A discussão sobre o domínio da função não ocorreu, ainda que na tarefa, fosse solicitado o gráfico da lei de formação, mas como elas estavam atreladas à situação, essa dúvida poderia ter sido levantada. Se a apropriação do conceito de função pelos alunos tivesse atingido o nível do pensamento teórico, essa questão seria levantada, pois não se pode falar de função de uma variável sem definir uma variável dependente dentro de um dado domínio. Os gráficos plotados tem o seu domínio e o contra-domínio definidos em IR.

Tarefa2.4: Entre as promoções I e III, qual delas você aconselharia sua professora a aderir? Justifique sua resposta. (Para justificar sua resposta você pode utilizar cálculos matemáticos ou analisar os gráficos feitos pelo *Winplot*).

Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução: Para analisar qual das promoções é mais vantajosa, o aluno pode construir uma tabela atribuindo valores para a variável x, e encontrando os valores da variável y, realizando assim uma comparação entre as três promoções. Outra forma de resolução é analisar graficamente, em que o aluno irá perceber que, a partir de certo número de DVDs alugados, a promoção I se torna mais vantajosa, deixando claro que isso depende do número de DVDs que a pessoa pretende alugar. O exercício não solicitou, mas alguns alunos poderão responder que a promoção I torna-se mais vantajosa, alugando-se acima de 8 DVDs. Essa informação não deixa de ser a justificativa do exercício.

Resposta esperada: Analisando graficamente o aluno irá notar que a promoção I é mais econômica, mas para Igualando as duas funções (Promoção I e Promoção III):

$$15+1,2x=3x$$
$$3x-1,2x=15$$
$$1,8x=15$$
$$x=8,333$$

Desta forma, a promoção I se torna mais econômica a partir 8 DVDs.

Resposta encontrada pelos alunos na Tarefa 2.4

Resposta	**Sujeitos**
A Promoção I, pois o valor do aluguel é mais barato.	Grupo 1
Se ela for alugar menos de 24 DVDs, eu aconselho ela escolher a promoção III, mas se ela for alugar mais de 24 DVDs, eu aconselho ela escolher a promoção I.	Grupo 2
Eu aconselharia minha professora a aderir à promoção III, pois ela não tem taxa de adesão, e assim se torna mais barata.	Grupo 3
A opção 3.	Grupo 4
Eu indicaria a promoção III.	Grupo 5
A promoção I é a melhor opção pois aproximadamente após o oitavo DVD ela se torna mais lucrativa.	Grupo 6

Análise a priori: Três grupos conseguiram chegar à resposta esperada, que seria indicar a Promoção I. Mas, nenhum dos grupos deixou claro qual processo utilizou para chegar a esta conclusão. Os outros três grupos indicaram a resposta errada. As gravações de áudio não deixam claro qual foi o processo utilizado para as conclusões estabelecidas, ao que parece os alunos apenas analisaram a situação sem utilizar nenhum procedimento matemático.

Tarefa 2.5: Um colega escolheu a Promoção II e gastou R$ 56,00 no ano. Esse colega escolheu a melhor opção de pagamento para o seu caso? Justifique a sua resposta.

Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução: Para definir se a promoção II foi a melhor opção, basta o aluno substituir a variável que representa o número de DVDs por 56, e, assim, verificar quantos DVDs a pessoa teria conseguido alugar em cada uma das promoções, chegando à conclusão de que a melhor opção seria a promoção I. Mas, o aluno também poderá fazer esta análise graficamente, e concluir que realmente tendo um gasto de 56 reais, a melhor opção seria a promoção I.

Resposta esperada:

$$y = 15 + 1{,}2x$$

Promoção I: $56 = 15 + 1{,}2x$

$$x \cong 34$$

$$y = 10 + 2x$$

Promoção II: $56 = 10 + 2x$

$$x \cong 23$$

$$y = 3x$$

Promoção III**:** $56 = 3x$

$$x \cong 18$$

Desta forma a Promoção II não é a melhor opção, neste caso a promoção I seria a melhor opção, sendo alugados 34 DVDs.

Resposta encontrada pelos alunos para a Tarefa 2.4:

Resposta	**Sujeitos**
Pro I $56 = 15 + 1{,}2x$ $56 - 15 = 1{,}2x$ $x = \frac{41}{1{,}2}$ $x \cong 34$ Pro II $56 = 10 + 2x$ $56 - 10 = 2x$ $x = \frac{46}{2}$ $x = 23$ Pro III $56 = 3x$ $x = \frac{56}{3}$ $x = 18$ Não, pois a melhor opção seria a promoção I.	Grupo 1
I $56 = 15 + 1{,}2x$ $56 - 15 = 1{,}2x$ $\frac{41}{1{,}2} = x \cong 34{,}17$ II $56 = 10 + 2x$ $56 - 10 = 2x$ $\frac{46}{2} = x = 23$ III $56 = 3x$ $\frac{56}{3} = x \cong 18{,}67$ não, o colega deveria ter escolhido a Promoção I	Grupo 2

II → $56 = 2{,}0 \cdot x + 10$ $56 - 10 = 2{,}0 \cdot x$ $46 = 2{,}0 \cdot x$ $x = \frac{46}{2}$ $\boxed{x = 23{,}00}$ I → $56 = 1{,}2 \cdot x + 15$ $56 - 15 = 1{,}2 \cdot x$ $41 = 1{,}2 \cdot x$ $x = \frac{41}{1{,}2}$ $\boxed{x \cong 34{,}16}$ III → $56 = 3{,}0$ $x = \frac{56}{3}$ $\boxed{x \cong 18{,}66}$ Não, pois se ele estivesse escolhido a opção III ele teria gastado menos.	Grupo 3
Em branco	Grupo 4
Não. Pois com a taxa de adesão anual, o preço fica maior.	Grupo 5
Não, a melhor escolha seria a I pois nessa promoção com 56,00 reais se aluga 34 DVDs enquanto na II se aluga 23 DVDs.	Grupo 6

Análise a posteriori: Um grupo deixou a resposta em branco. Três grupos utilizaram o processo previsto na análise *a priori*, que seria substituir o valor em cada uma das promoções e verificar que realmente a promoção I é mais vantajosa, pois a pessoa irá alugar 34 DVDs. O grupo 5 apenas colocou as respostas sem descrever qual o procedimento utilizado. E o grupo 6 somente chegou a conclusão a partir da intervenção da pesquisadora, o diálogo pode ser verificado no Anexo C.Cabe observar que nenhum grupo se utilizou da resolução gráfica.Essa tarefa mostra que o aluno identifica a variável y, como o número de DVDs alugados, embora não a tenha escrito em outras tarefas, como pudemos constatar.

3. 3Análise da situação-problema 3

Objetivo da tarefa: Analisar se o aluno percebe o papel dos parâmetros na definição da função afim, relacionando a representação algébrica e a geométrica. Identificar qual a abordagem pedagógica que mais favorece a resolução da situação problema - por meio do *Winplot* ou sem o seu uso. Analisar a apropriação do conceito do coeficiente angular.

Tarefa 3.1: Considerando as funções do tipo $y = ax$ e utilizando o recurso computacional ao seu alcance, no caso o *Winplot*, construa gráficos para **a = 1** e para **a > 1** (use retas diferentes para o segundo caso). Para registro de sua atividade, coloque o *print screen* da tela de sua construção gráfica. Os gráficos podem ser construídos em uma mesma tela do sistema.

Dica: No *Winplot* clique na aba *Equação* e em seguida na opção *Explicita*. Assim você conseguirá plotar os gráficos.

*Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução:*Esperamos que o aluno consiga desenvolver a construção gráfica de uma função afim, utilizando o *software Winplot*. O aluno deve atribuir aleatoriamente valores maiores que “um” para o coeficiente angular e também o coeficiente angular igual a “um”, e realizar a representação gráfica. Alguns alunos, ainda poderão tentar visualizar o gráfico, resolvendo de forma manual, atribuindo valores para a variável x e encontrando os valores da variável y, para, posteriormente, tentarem ou não visualizar o gráfico no *Winplot*.

*Resposta esperada:*O aluno irá construir o gráfico da função linear, considerando $a = 1$ e $a > 1$, considerando $a > 0$, representar pelo menos três exemplos de gráficos para uma melhor visualização. Verificar quais os procedimentos que o aluno utilizou para realizar a atividade, conhecimentos matemáticos a respeito de construção gráfica ou o *Winplot*. Alguns exemplos do que os alunos poderão utilizar.

Valores de a	Função: y = ax
a = 1	y = x
a = 2	y = 2x
a = 3	y = 3x
a = 4	y = 4x

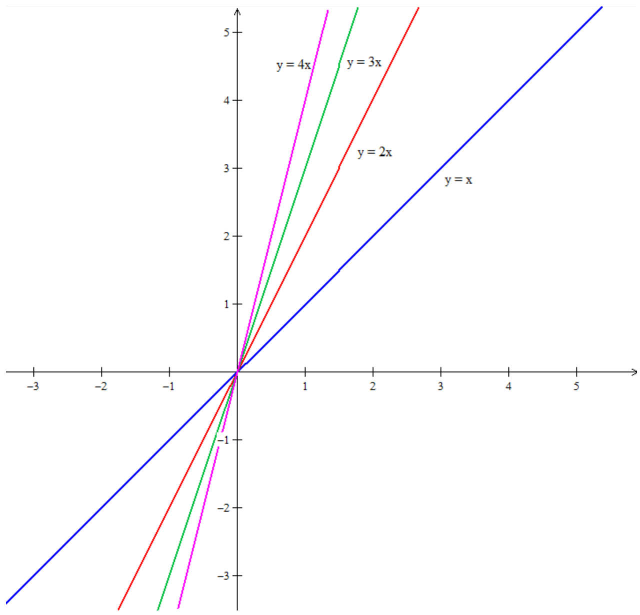
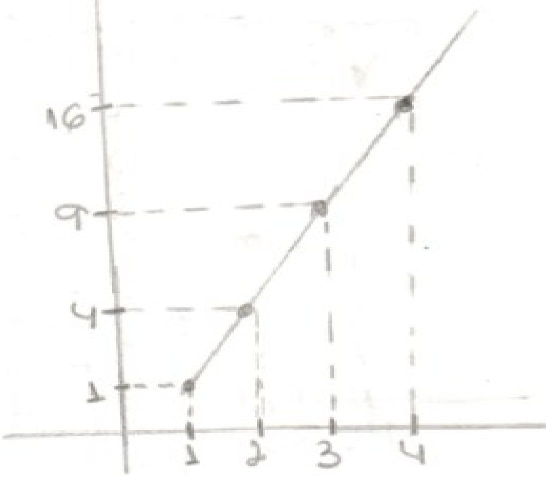
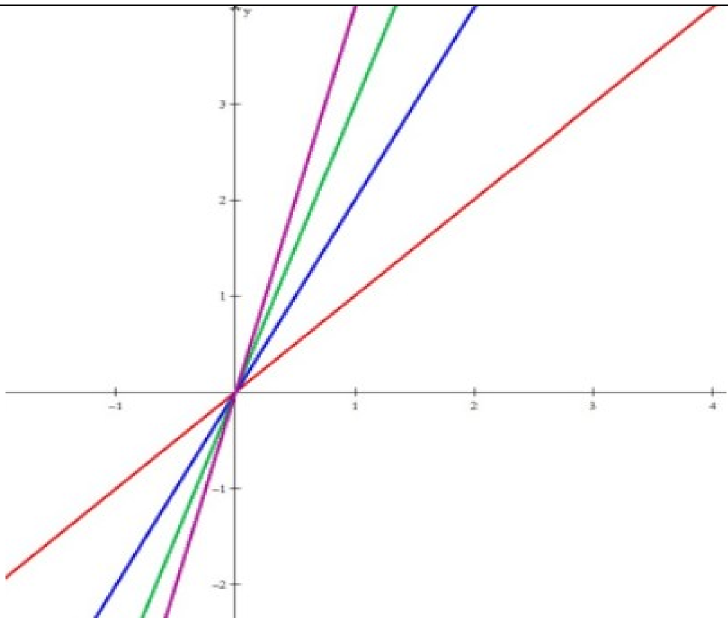
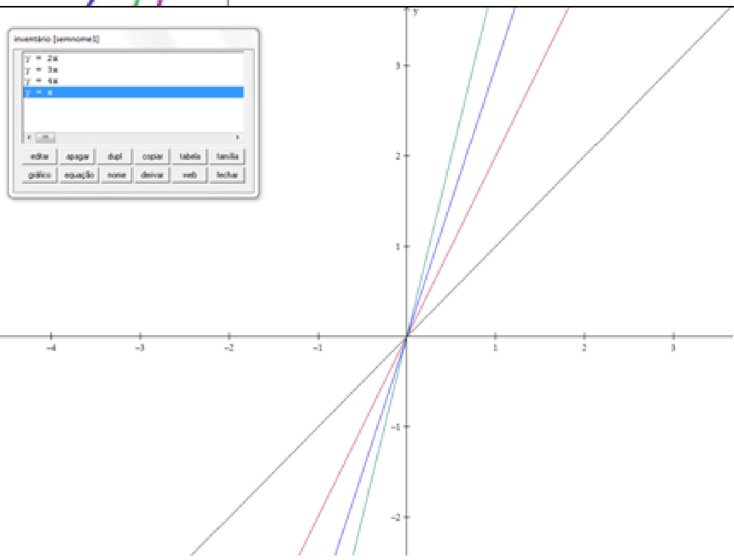
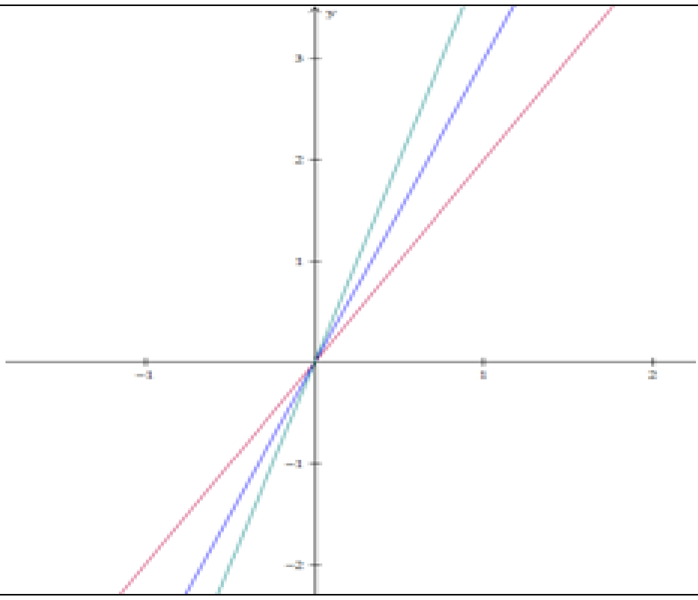
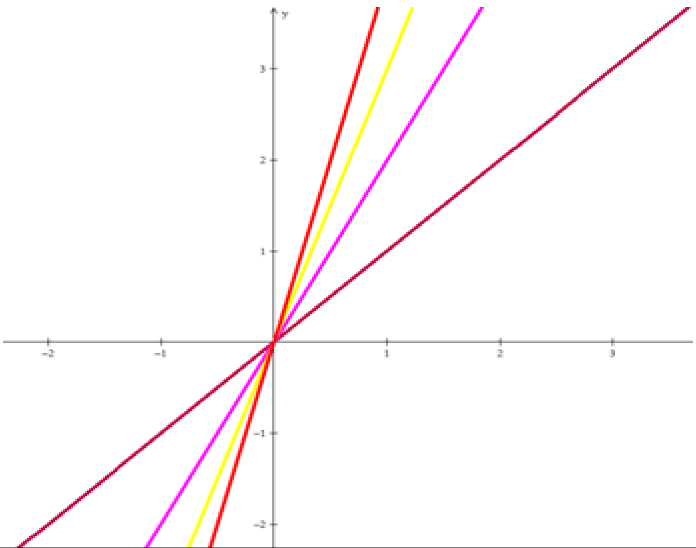
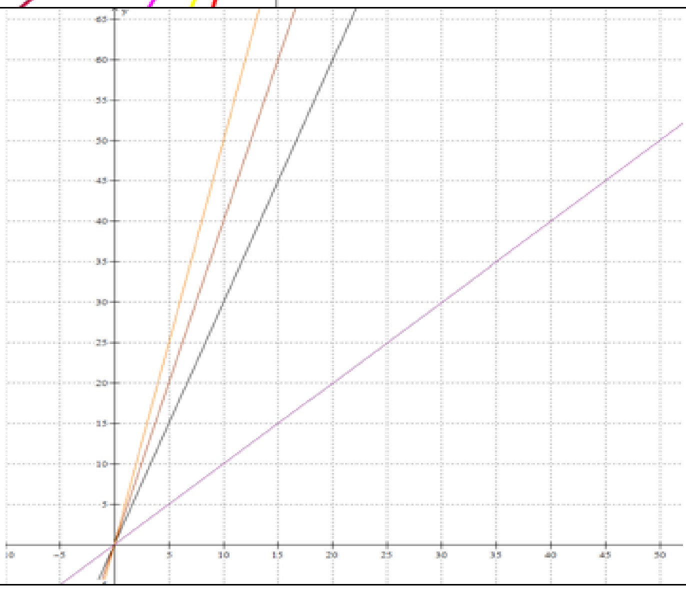


Figura 22:Gráfico do item 3.1.

Resposta encontrada pelos alunos para a Tarefa 3.1

Resposta			**Sujeitos**
Valores de a	Função: y = ax		Grupo 1
a = 1	y = x		
a = 2	4		
a = 3	9		
a = 4	16		
Valores de a	Função: y = ax		Grupo 2
a = 1	y = x		
a = 2	y = 2x		
a = 3	y =3x		
a = 4	y = 4x		
Valores de a	Função: y = ax		Grupo 3
a = 1	y = x		
a = 2	y = 2x		
a = 3	y =3x		
a = 4	y = 4x		

<table>
<tr><td>Valores de a
a = 1
a = 2
a = 3
a = 4</td><td>Função: y = ax
y = x
y = 2x
y =3x
y = 4x</td><td></td><td>Grupo 4</td></tr>
<tr><td>Valores de a
a = 1
a = 2
a = 3
a = 4</td><td>Função: y = ax
y = x
y = 2x
y =3x
y = 4x</td><td></td><td>Grupo 5</td></tr>
<tr><td>Valores de a</td><td>Função: y = ax</td><td></td><td>Grupo 6</td></tr>
</table>

Análise a posteriori: Cinco grupos conseguiram desenvolver a atividade utilizando o software *Winplot*, destes grupos todos atribuíram os mesmos valores para o coeficiente “a” (1, 2, 3 e 4). Apenas o grupo 1 não conseguiu desenvolver a atividade e tentou realizar de forma manual. Analisando a transcrição do áudio desse grupo 1, não é possível distinguir quais os procedimentos e análises realizadas por estes alunos para a sua construção. De forma geral, os alunos não apresentaram dificuldades para a utilização do *software*, mas a interpretação da atividade já foi um pouco mais difícil. Alguns alunos tiveram dificuldades em compreender que deveriam atribuir valores para o coeficiente angular (a), mas depois de algumas intervenções conseguiram realizar a construção.O diálogo mostra que para os alunos não está claro o que é a variável e o que é um parâmetro. O que *a* representa, se ele também está variando? Segue abaixo a transcrição de uma parte deste diálogo:

Sujeitos da dupla	Diálogos
S1	Maior que zero vai ser....
S2	1,2,3 e 4; agora é só substitui, mas perai a gente precisa do valor de X. Será que é isso?
S1	E se a gente joga no *Winplot*......
S2	Ai deu certo.
S1	A gente vai joga valor para A.
Professor	Éa construção de funções de Y=X construa o gráfico das funções de A=1 . Você vai digita em Y - explícita, isso, igual você fez ai. A maior que 0 utiliza no máximo 3 valores diferentes.
S1	A gente não tinha que variar o valor de X, e não de A? Então, isso que eu estou em dúvida, se a gente pega o valor de A e joga na fórmula e acha Y, certo?
S2	Não, mas eu entendi que ele já pois o A valendo 1 e depois você tem que joga valores maiores que 0 para , 2,3 e 4.
Professor	Não o X, X é a variável independente então o que acontece, o X é o conjunto dos números reais, de todos os valores numéricos que vocês imaginarem dentro dos conjuntos dos números reais. O queela tá pedindo? Quem tá variando, é o A,X que varia, por qualquer número que você substitui. Só que o que vai acontecendo com o gráfico à medida que você vai alterando os valores de A.
S2	Vai mudando.
Professor	Vocês entenderam o que esta acontecendo ali a ideia é essa, então o que tá acontecendo aqui, quando o A for 1, se você substitui aqui, você vai obter Y = a quanto? A X, mas quem é X, X é qualquer numero valor, quando o A for 2, o que vai acontecer, Y vai ser igual a 2X, mas o que vai acontecendo, o X é valor, quando o A for 3, você entendeu qual o raciocínio do que tá acontecendo?
S2	Então tá certo?

Tarefa 3.2: Considerando as funções do tipo $y = ax$. Utilizando o recurso computacional ao seu alcance, no caso o *Winplot*, construa o gráfico quando **a = - 1** e quando **a <-1** (use retas diferentes para o segundo caso). Para registro de sua atividade, coloque o *print screen* da tela de sua construção gráfica. Os gráficos podem ser construídos em uma mesma tela do sistema.

Dica: No *Winplot* clique na aba *Equação*, em seguida na opção *Explícita*, assim você conseguirá plotar os gráficos.

Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução. Esperamos que o aluno consiga desenvolver a construção gráfica de uma função afim, utilizando o software *Winplot*. Considerando que a maioria dos alunos não desenvolve a representação gráfica, utilizando o recurso computacional, provavelmente, encontrarão dificuldades. Assim, o aluno deve atribuir aleatoriamente valores menores que “um” para o coeficiente angular e também o coeficiente angular igual a “menos um”, e realizar a representação gráfica. Alguns alunos, ainda, podem tentar visualizar o gráfico, resolvendo de forma manual, atribuindo valores para a variável x e encontrando os valores da variável y, para posteriormente tentarem ou não visualizar o gráfico no *Winplot.*

*Resposta esperada:*O aluno irá construir o gráfico da função linear, considerando a = -1 e a< -1, considerando para a <0, no mínimo três exemplos. Verificar quais os procedimentos que o aluno utilizou para realizar a atividade, conhecimentos matemáticos a respeito de construção gráfica ou o *Winplot*. Alguns exemplos do que os alunos poderão utilizar.

Valores de a	Função: y = ax
a= -1	y = - x
a= -2	y = -2x
a= -3	y = -3x
a= -4	y = -4x

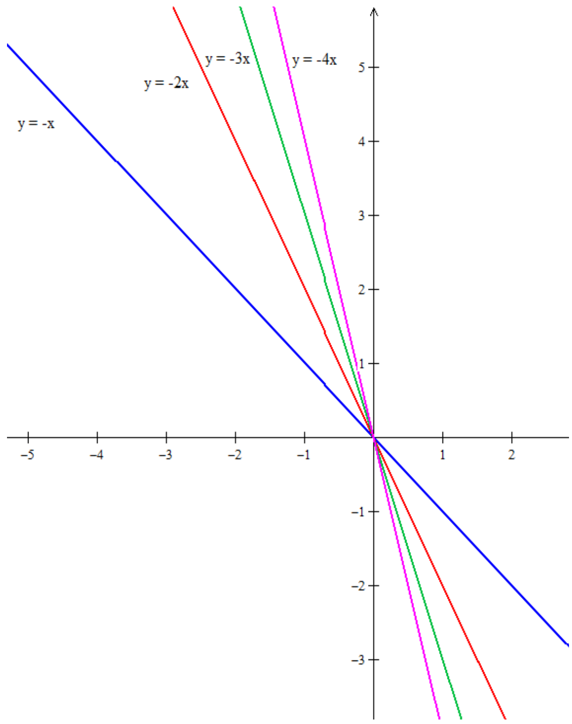
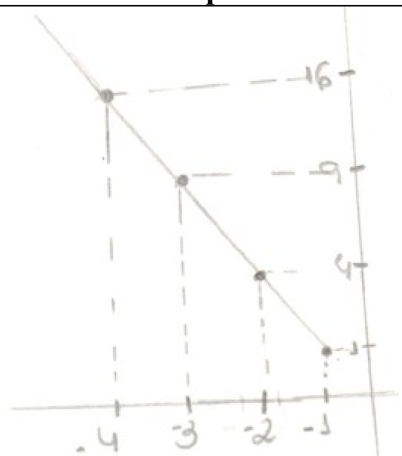
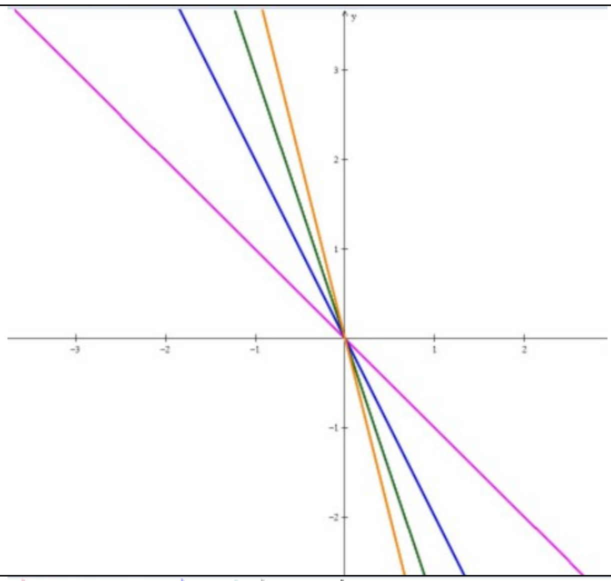
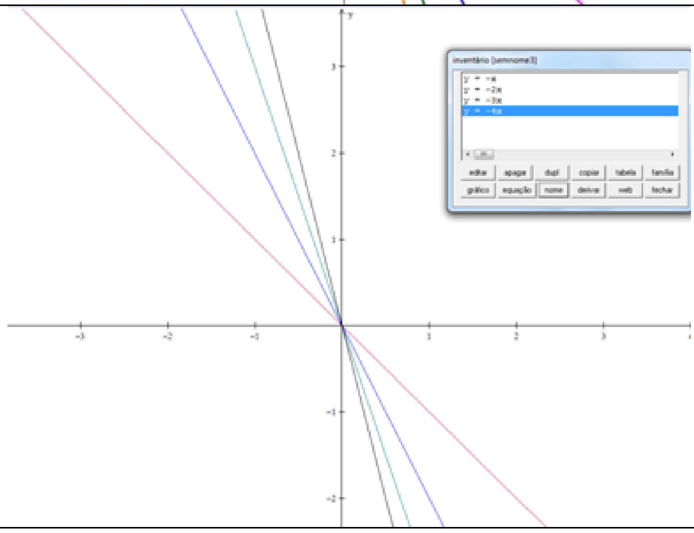
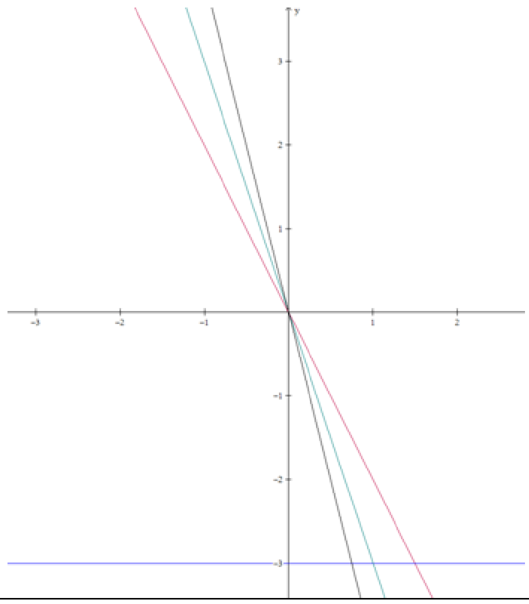
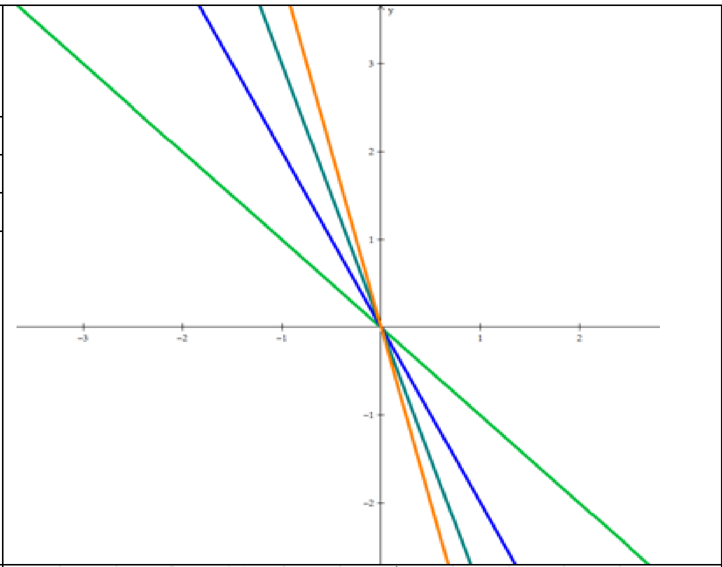
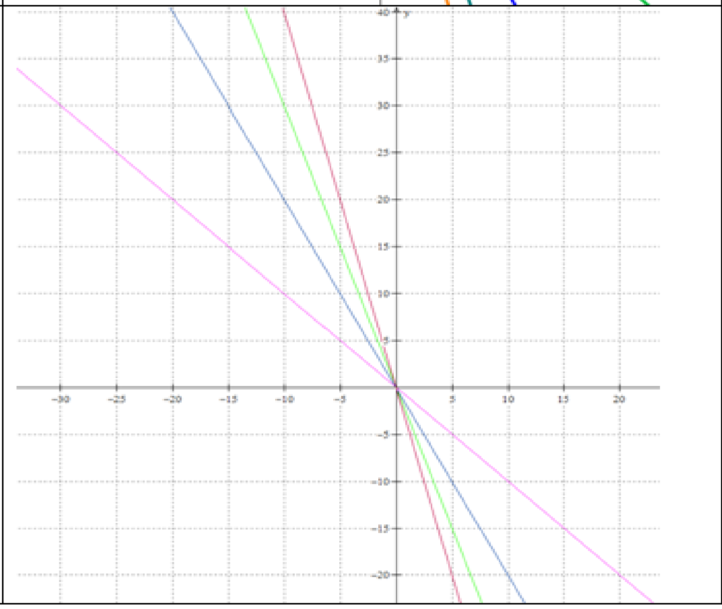


Figura 23: Gráfico do item 3.2

Resposta encontrada pelos alunos para a Tarefa 3.2

<table>
<tr><th colspan="3">Resposta</th><th>Sujeitos</th></tr>
<tr><td>Valores de a</td><td>Função: y = ax</td><td rowspan="5">
</td><td rowspan="5">Grupo 1</td></tr>
<tr><td>a = -1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>a = -2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>a = -3</td><td>9</td></tr>
<tr><td>a = -4</td><td>16</td></tr>
<tr><td>Valores de a</td><td>Função: y = ax</td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5">Grupo 2</td></tr>
<tr><td>a = -1</td><td>y = -x</td></tr>
<tr><td>a = -2</td><td>y = -2x</td></tr>
<tr><td>a = -3</td><td>y = -3x</td></tr>
<tr><td>a = -4</td><td>y = -4x</td></tr>
</table>

			
Valores de a	Função: y = ax		Grupo 3
a = -1	y = -x		
a = -2	y = -2x		
a = -3	y = -3x		
a = -4	y = -4x		
Valores de a	Função: y = ax		Grupo 4
a = -1	y = -x		
a = -2	y = -2x		
a = -3	y = -3x		
a = -4	y = -4x		

<table>
<tr><td>Valores de a</td><td>Função: y = ax</td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5">Grupo 5</td></tr>
<tr><td>a = -1</td><td>y = -x</td></tr>
<tr><td>a = -2</td><td>y = -2x</td></tr>
<tr><td>a = -3</td><td>y = -3x</td></tr>
<tr><td>a = -4</td><td>y = -4x</td></tr>
<tr><td>Valores de a</td><td>Função: y = ax</td><td></td><td>Grupo 6</td></tr>
</table>

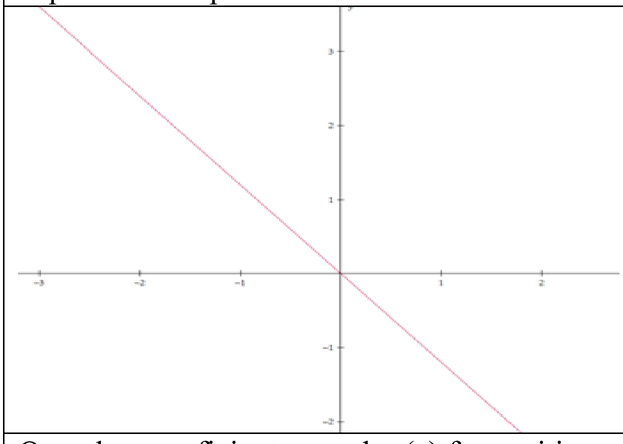
Análise a priori: Como esta tarefa é semelhante à anterior, os alunos não tiveram dificuldade em resolver, pois os procedimentos eram semelhantes. Somente o grupo 1 ainda continuou realizando a tarefa de forma errada. A intervenção da pesquisadora no trabalho das duplas somente foi realizada, quando solicitada.

Tarefa 3.3: Ainda considerando as funções do tipo $y = ax$, o que acontece com a reta quando você varia o **a**, ou seja, o coeficiente angular, conforme você realizou exemplos nos itens 3.1 e 3.2. Para você conferir, utilize o recurso computacional. No *Winplot,* clique na aba *Equação*, em seguida na opção *Explicita* e digite a função $y = ax$. Agora clique na aba *Anim*, em seguida na opção *A*. Neste momento varie o valor de a com valores positivos e negativos e observe o que irá acontecer com o gráfico. Qual relação você pode concluir entre o valor do coeficiente **a** e a reta?

*Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução.*Ao utilizar a opção *Anim* do *software Winplot,* o aluno deverá perceber que este comando varia o valor do coeficiente angular. Desta forma, deve concluir que, quando atribuímos um valor positivo para o coeficiente angular, encontramos uma reta crescente, e, quando o coeficiente angular possui um valor negativo, a reta será decrescente. Muitos alunos podem encontrar dificuldade em descrever esta conclusão, devido à dificuldade de interpretação gráfica e também suas características.

Resposta esperada: O aluno deve observar e refletir que à medida que $a > 0$, a função será crescente, e à medida que $a < 0$, a função será decrescente. Desta forma, o coeficiente angular é que determina se a reta será crescente ou decrescente.

Resposta encontrada pelos alunos da Tarefa 3.3:

Resposta	**Sujeitos**
Quando o coeficiente angular é maior que 0, a reta é crescente, e, quando é menor que 0, é decrescente.	Grupo 1
Quando colocamos valores positivos, ela passa em cima dos gráficos da atividades 3.1. E quando colocamos valores negativos ela passa também em cima dos gráficos da atividade 3.2	Grupo 2
Podemos observar que, quando o coeficiente angular (a) for um número real negativo, a reta do gráfico será decrescente, e quando ele é positivo a reta será crescente.	Grupo 3
	Grupo 4
Quando o coeficiente angular (a) for positivo, a reta será crescente, e quando for negativa, será decrescente.	Grupo 5
Quando este for positivo a reta é crescente e quando for negativo a reta é decrescente.	Grupo 6

Análise a posteriori: Quatro grupos conseguiram chegar à conclusão prevista na análise *a priori*. O grupo 4 apenas colocou o gráfico que havia construído, mas não realizou a interpretação dos dados. O grupo 2 chegou à conclusão errada. No caso, para realizar a conclusão deste exercício partimos de casos particulares, ou seja, o aluno tinha que realizar uma série de construções gráficas no item 3.1 e 3.2 e generalizar suas conclusões no item 3.3. Em outras palavras, os itens 3.1 e 3.2 ajudariam os alunos em suas conclusões no item 3.3.Nesta atividade, os alunos já apresentaram uma dificuldade maior em associar que o coeficiente angular permite determinar a inclinação da reta que representa o gráfico da função.

3.4 Análise da situação-problema 4

Objetivo da tarefa: Analisar se o aluno percebe o papel dos parâmetros *a* e *b* na definição da função afim, relacionando a representação algébrica e a geométrica. Identificar qual a abordagem pedagógica que mais favorece a resolução da situação-problema –por meio do *Winplot* ou sem o seu uso. Analisar a apropriação do conceito do coeficiente angular, como o responsável pela inclinação da reta, no caso do gráfico, e como número que expressa a proporcionalidade entre x e y.

Tarefa 4.1: O que se pode afirmar a respeito do gráfico da função $y = ax + b$, quando **a** é positivo? Quando **a** é negativo? E quando o **a** vale zero? Para responder a esta questão utilize o *Winplot*. Plote o gráfico dos três exemplos solicitados a = 0, a < 0 e a > 0, ou seja, atribua valores somente para o coeficiente angular, para o coeficiente linear deixe o próprio *b.* Para plotar o gráfico, utilizando o *Winplot,* clique na aba Equação.Em seguida, na opção Explicita e digite a função desejada. Para registro de sua atividade, coloque o *print screen* da tela de sua construção gráfica e anote suas conclusões.

Valores de b	Função: y = ax + b
a< 0	
a = 0	
a> 0	

Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução. Esperamos que o aluno consiga construir o gráfico de uma função afim, utilizando o *software Winplot*. Considerando que a maioria dos alunos não desenvolve a representação gráfica utilizando o recurso computacional, provavelmente encontrarão dificuldades. Alguns alunos podem encontrar dificuldade em realizar o exercício, visto que não será atribuído nenhum valor para o coeficiente linear, assim o aluno deve atribuir valores somente para o coeficiente angular, positivo, negativo e zero. Desta forma, deve relacionar que o coeficiente angular indica a inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas, portanto a forma de variação proporcional entre as variáveis. Além disso, deve relacionar que, se o coeficiente angular for positivo, a função é crescente, e, se for negativo, a função será decrescente.

Resposta esperada: O aluno deve perceber que o coeficiente angular indica a inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas. Além disso, deve relacionar que, se o coeficiente angular for positivo, a função é crescente, e, se for negativo, a função será decrescente.

Exemplo de resposta as quais os alunos podem determinar:

Valores de b	Função: y = ax + b
a< 0	y = x + b
a = 0	y = b
a> 0	y = -x + b

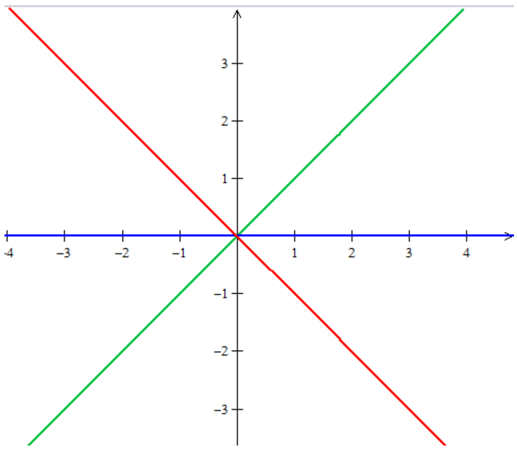
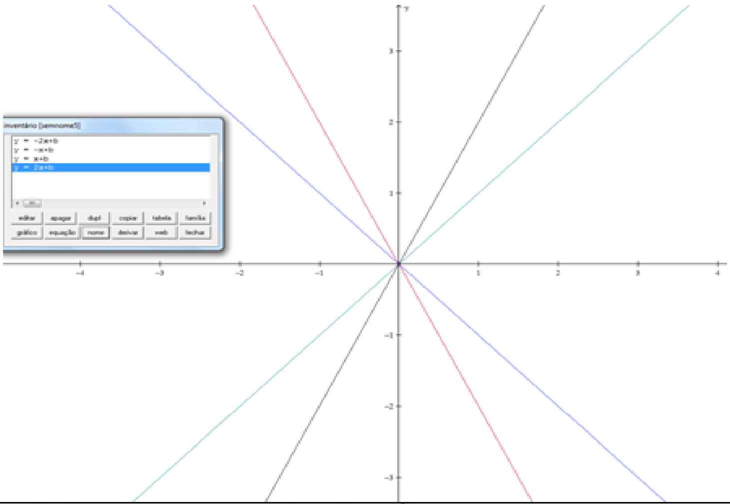
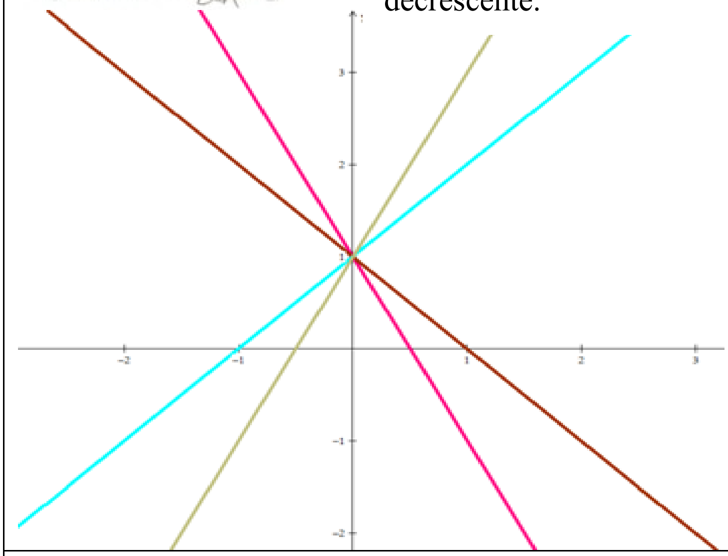


Figura 24:Gráfico do item 4.1

Resposta encontrada pelos alunos na Tarefa 4.1

Resposta	**Sujeitos**
Quando o a é positivo, aparecerá uma reta crescente e quando for negativo a reta é decrescente, e elas se cruzam.	Grupo 1
Quando o coeficiente angular (a) for positivo o gráfico vai ser crescente. Quando o coeficiente angular (a) for negativo o gráfico	Grupo 2

<table>
<tr><td>vai ser decrescente.</td><td></td></tr>
<tr><td>a |
-2 | -2x+b
-1 | -1x+b
1 | x+b
2 | 2x+b
</td><td>Grupo 3</td></tr>
<tr><td>y = x + b   y = -x + b
y = 2x + b   y = -2x + b
y = 3x + b   y = -3x + b</td><td>Grupo 4</td></tr>
<tr><td>a = -2 | -2x + 1
a = -1 | -x + 1
a = 1 | x + 1
a = 2 | 2x + 1

Sempre irá passar pelo ponto b e quando (a) é positivo, é crescente, quando negativo, é decrescente.
</td><td>Grupo 5</td></tr>
<tr><td>Quando o a for positivo o gráfico é crescente.</td><td>Grupo 6</td></tr>
</table>

Análise a posteriori: Nenhum dos grupos conseguiu relacionar que o coeficiente angular indica a inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas. Três grupos conseguiram concluir que quando o coeficiente "a" for positivo a função será crescente, e, quando "a" for negativo, a função será decrescente. Aliás, essa é uma característica bastante enfatizada nos livros didáticos e também pelos professores, tanto é que os grupos 1 e 2, nem sequer construíram o gráfico. Mais distante fica ainda o papel dos coeficientes não na representação, mas no conceito mesmo da função afim. O grupo 3 apenas colocou a construção gráfica e não realizou a interpretação dos dados. O grupo 4 apenas iniciou a tarefa, atribuindo valores para o coeficiente angular, mas não fez o gráfico e não realizou a interpretação dos dados. E para finalizar o grupo 6 não interpretou o resultado para quando a assumir valores negativos e também não fez a tarefa como solicitada.

Tarefa 4.2: O que se pode afirmar a respeito do gráfico da função $y = ax + b$, quando **b** é positivo? Quando **b** é negativo? E quando o **b** vale zero? Para responder a esta questão utilize o *Winplot*. Plote o gráfico dos três exemplos solicitados b = 0, b < 0 e b > 0, ou seja, atribua valores somente para o coeficiente linear, para o coeficiente angular deixe o próprio coeficiente "a". Para plotar o gráfico utilizando o *Winplot,* clique na aba *Equação*, em seguida, na opção *Explicita,* e digite a função desejada. Para registro de sua tarefa, coloque o *print screen* da tela de sua construção gráfica e anote suas conclusões.

Valores de a	Função: y = ax + b
b > 0	
b = 0	
b< 0	

Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução: Esperamos que o aluno consiga desenvolver a construção gráfica de uma função afim, utilizando o software *Winplot*. Considerando que a maioria do alunos não desenvolve a representação gráfica, utilizando o recurso computacional provavelmente encontrarão dificuldades. Alguns alunos poderão encontrar dificuldade em realizar o exercício, visto que não será atribuído nenhum valor para o coeficiente angular, assim o aluno deve atribuir valores somente para o coeficiente linear, sendo um positivo, um negativo e o valor zero. Desta forma, deve relacionar que é o coeficiente linear que indica onde a reta irá intersetar o eixo das ordenadas. Se o coeficiente *b* for positivo,intersetará o eixo y na parte positiva, mas, se o coeficiente *b,* for negativo irá intersetar o eixo y na parte negativa, e, se for nulo, a reta passará pela origem do sistema.

Resposta esperada: O aluno deve perceber que o coeficiente linear indica onde a reta irá intersetar o eixo das ordenadas. Se o coeficiente *b* for positivo, intersetará o eixo para as coordenadas positivas, mas, se coeficiente *b* for negativo,irá intersetar o eixo y para as coordenadas negativas.Segue abaixo uma possibilidade de resposta, para a = 0.

Valores de b	Função: y = ax + b
b < 0	y = ax - 1
b = 0	y = ax
b > 0	y = ax + 1

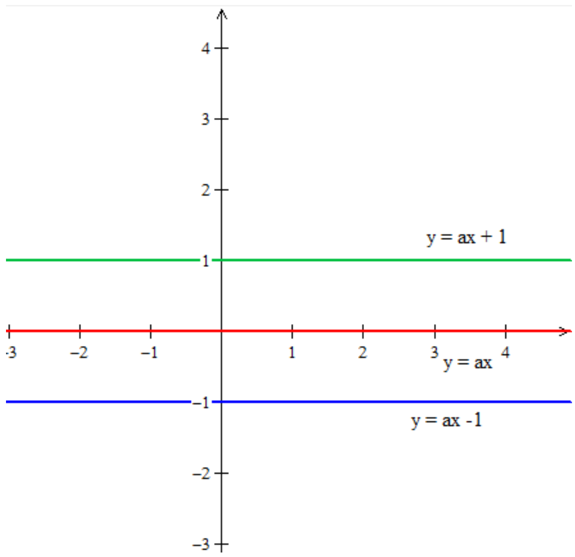
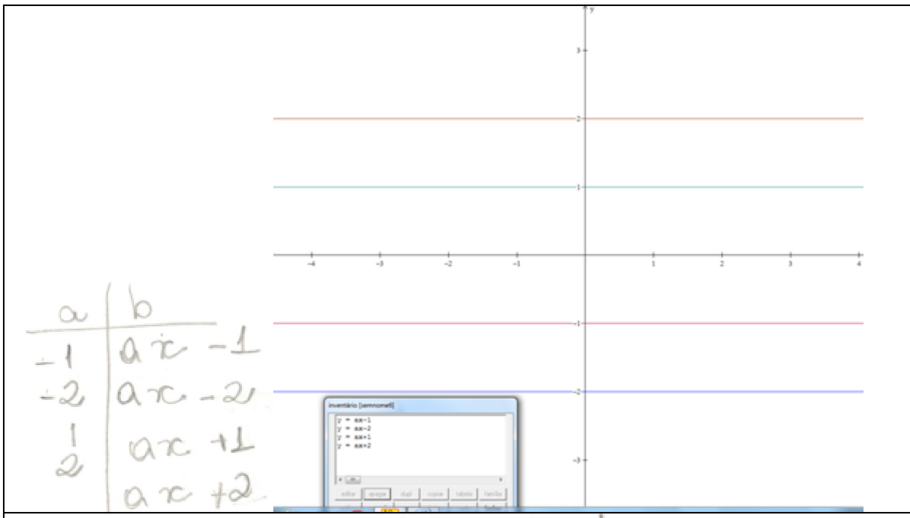
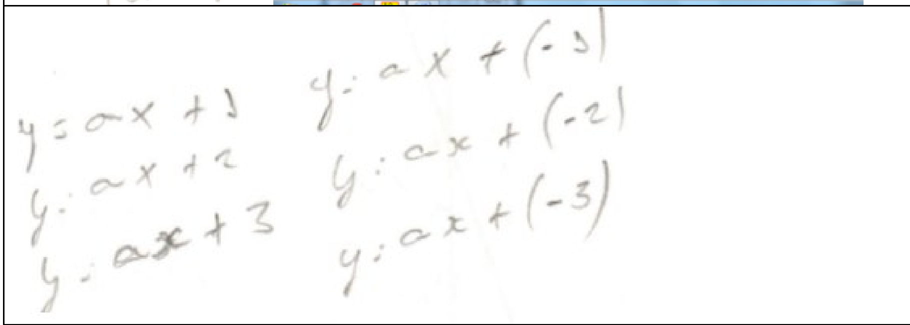
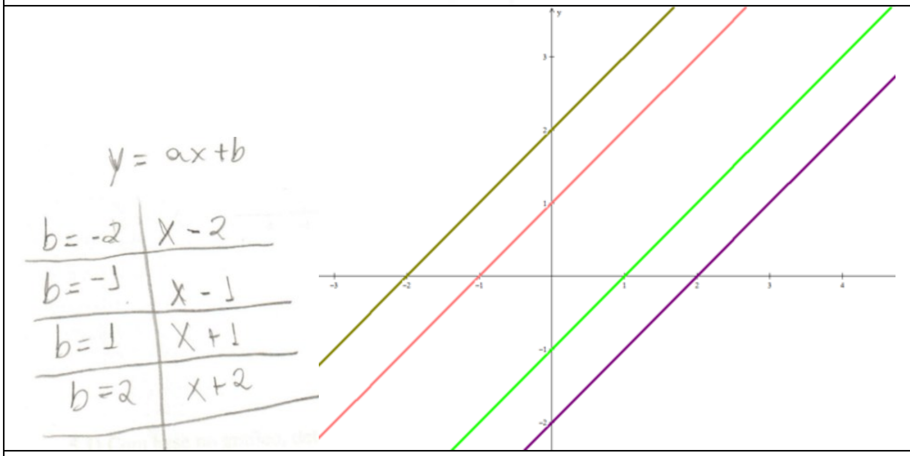


Figura 25: Gráfico do item 4.2

Resposta encontrada pelos alunos:

Resposta	Sujeitos
Aparecerá 2 retas paralelas.	Grupo 1
Quando b for positivo ele vai cortar o eixo y positivo. E quando b for negativo ele vai cortar o eixo y negativo.	Grupo 2

	Grupo 3
	Grupo 4
	Grupo 5
Em branco.	Grupo 6

Análise a posteriori: Nesta atividade, cinco grupos encontraram dificuldades e não conseguiram chegar aos resultados esperados, assim podemos perceber que realmente não compreenderam o papel dos parâmetros *a* e *b* e não conseguem relacioná-los à representação algébrica e à geométrica da função afim. Alguns grupos atribuíram valores para os parâmetros *a* e *b*, outros para a variável x. Somente o grupo 2 realizou as conclusões previstas na análise *a priori*, porém não construiu o gráfico. O grupo 3 conseguiu construir graficamente, mas não realizou a interpretação dos dados. O grupo 6 deixou a atividade em branco.

3.5Análise da situação-problema 5

*Objetivo da tarefa:*Analisar se o aluno faz as conversões de uma representação para outra – da geométrica para a algébrica.Ampliar o conceito de função afim. Identificar qual a abordagem pedagógica que mais favorece a resolução da situação problema - por meio do *Winplot* ou sem o seu uso. Analisar se o aluno percebe o papel dos parâmetros *a* e *b* na definição da função afim, relacionando a representação algébrica e a geométrica.

*Situação-Problema:*O gráfico a seguir representa uma função de 1º grau:

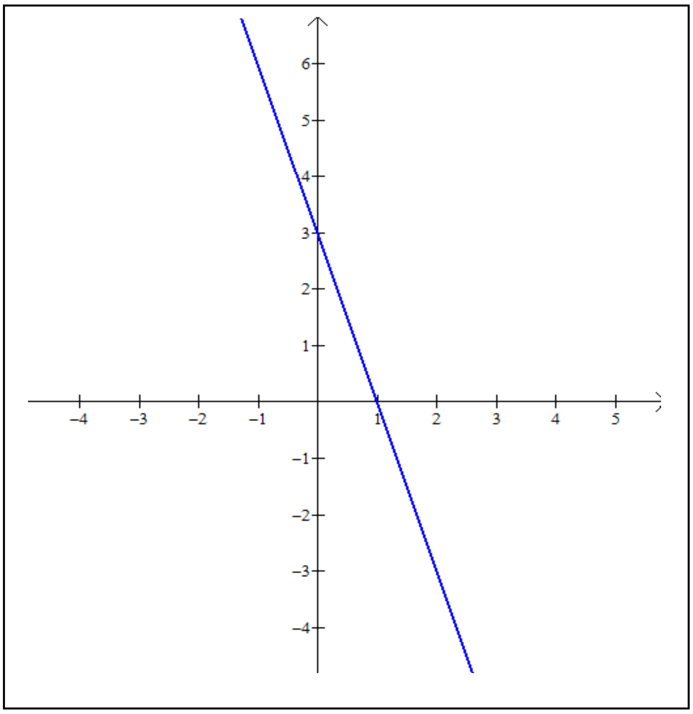


Figura 26: Gráfico da situação-problema 5

Tarefa 5.1 Com base no gráfico, determine a lei de formação da função.

*Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução:*Para determinar a lei de formação que representa este gráfico, o aluno precisa armar um sistema de equações lineares em que as incógnitas são os valores de *a* e de *b*, utilizando dois pontos pertencentes ao gráfico, por exemplo (0,3) e (1,0), ou seja, os pontos visíveis na representação gráfica. Mas antes disso, precisa ter se apropriado do significado desses coeficientes.Assim, o aluno irá resolver um sistema composto por duas equações lineares, determinadas a partir da equação geral: y = ax + b. Encontrando o conjunto solução do sistema, o aluno determina a lei de formação da função afim representada pelo gráfico.

Resposta esperada:

$0 = a + b \rightarrow \boxed{a = -b}$

$3 = a.0 + b \rightarrow \boxed{b = 3}$

$a = -b \rightarrow \boxed{a = -3}$

$\therefore\ y = -3x + 3$

Resposta encontrada pelos alunos na Tarefa 5.1

Resposta	**Sujeitos**
f (x) = -3x + 3	Grupo 1
f (x) = -3x + 3	Grupo 2
Não conseguimos identificar a lei de formação dessa função.	Grupo 3
y = -3x + 3	Grupo 4
A lei de formação é -3x + 3	Grupo 5
y = -3x + 3	Grupo 6

*Análise a posteriori:*Para desenvolver esta atividade era necessário o aluno interpretar os dados contidos no gráfico, mas infelizmente os alunos determinaram a resposta e não deixaram claros os procedimentos utilizados para chegar à conclusão. Somente o grupo 3 não conseguiu determinar a lei de formação e o grupo 4não indicou a variável dependente. As gravações de áudio não contribuíram para a análise desse item.

Tarefa 5.2 Verifique se os pontos *C= (3,-6), D= (-2,9), E = (2,-3), F= (-1,4)* pertencem à reta determinada. Descreva quais procedimentos ou recursos você utilizou para realizar essa verificação.

*Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução:*O aluno pode utilizar duas estratégias para verificar se os pontos $C(3,-6), D(-2,9), E(2,-3), F(-1,4)$ pertencem à reta. Na primeira estratégia e a mais provável, é que o aluno substitua os pontos na equação encontrada e verifique se a igualdade obtida é verdadeira ou falsa.Se for verdadeira, conclui que o ponto pertence à reta. Ele poderá também utilizar o *Winplot*, representando o gráfico encontrado, e, em seguida, plotando os pontos, verificar se eles estão sobre a reta.

Resposta esperada:

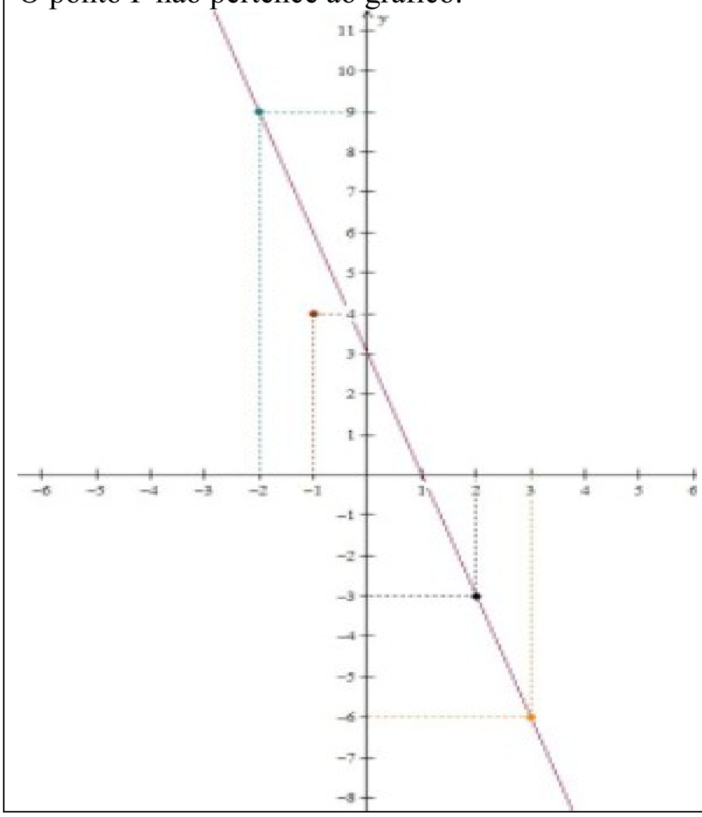
$C(3,-6) \Rightarrow$ pertence

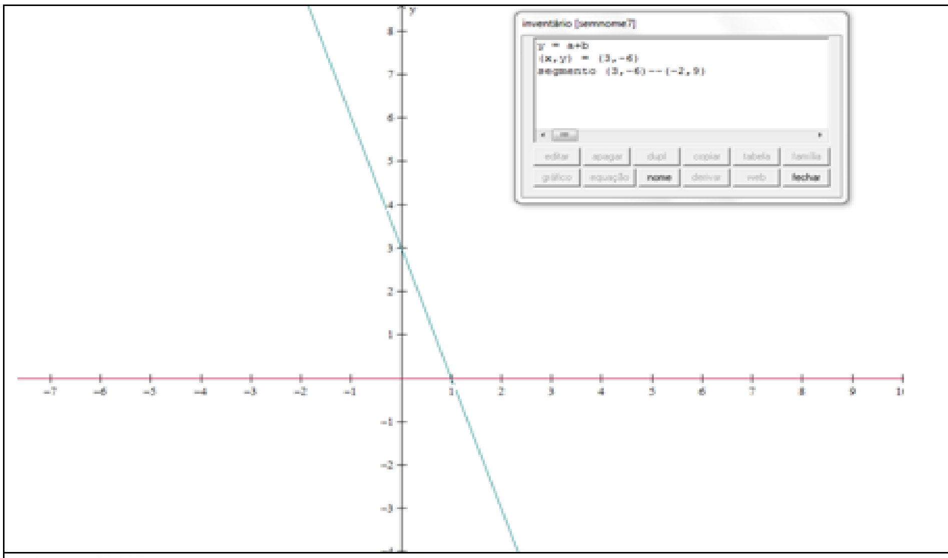
$D(-2,9) \Rightarrow$ pertence

$E(2,-3) \Rightarrow$ pertence

$F(-1,4) \Rightarrow$ *não* pertence

Resposta encontrada pelos alunos na Tarefa 5.2

Resposta	**Sujeitos**
C: $-6=-3x+3$; $-6-3=-3x$; $-9=-3x$; $x=\frac{-9}{-3}$; $x=3$ D: $9=-3x+3$; $9-3=-3x$; $6=-3x$; $x=\frac{6}{-3}$; $x=-2$ E: $-3=-3x+3$; $-3-3=-3x$; $-6=-3x$; $x=\frac{6}{3}$; $x=2$ jogar o valor de y e verificar se o x deu igual o das coordenadas.	Grupo 1
O ponto F não pertence ao gráfico. 	Grupo 2

	Grupo 3
$y = -3 \cdot 3 + 3 = -6$ $y = -3 \cdot -2 + 3 = 9$ $y = -3 \cdot 2 + 3 = -3$ $y = -3 \cdot -1 + 3 = 4$	Grupo 4
$-3x + 3$ x | y 3 | $-3(3) + 3 = -9 + 3 = \boxed{-6}$ -2 | $-3(-2) + 3 = 6 + 3 = \boxed{9}$ 2 | $-3(2) + 3 = -6 + 3 = \boxed{-3}$ -1 | $-3(-1) + 3 = 3 + 3 = \boxed{6}$ R: Os pares ordenados C=(3,-6); D=(-2,9) e E=(2,-3) pertencem, mas o par ordenado F=(-1,4) não pertence.	Grupo 5
Em branco.	Grupo 6

Análise a priori: O grupo 6 deixou a atividade em branco. O grupo 2 optou por realizar a análise graficamente, utilizando o *Winplot*. O grupo 1 atribui o valor da variável y e verificou se o valor para a variável x seria o mesmo já determinado anteriormente, mas não deixou claro se os pontos pertencem ou não a reta. O grupo 3 apenas realizou a construção do gráfico da função e não verificou se os pontos pertencem ou não à reta. O Grupo 4, ao contrário do grupo 1, atribuiu os valores para a variável x, verificando os valores encontrados para a variável y, mas não realizou nenhuma conclusão a respeito dos pontos.

As situações-problema e as tarefas contidas em cada uma delas envolviam o conceito de função afim, ou seja, a identificação de quantidades que variam e as que não variam; a relação funcional existente entre elas, isto é, o como variam; implicitamente a relação proporcional entre as variáveis – a essência da função afim; as representações geométrica e algébrica; o papel dos elementos caracterizadores de cada uma das funções afim.

Após termos analisado cada uma delas e apresentado os resultados produzidos pelos grupos de alunos participantes, fizemos uma síntese apresentada no quadro 2, para tentar responder ao objetivo da pesquisa.

Legenda: **X** – CORRETAMENTE, X – PARCIALMENTE, X– INCORRETAMENTE, 0 EM BRANCO

	TAREFA	OBJETIVO PRINCIPAL DA TAREFA	G1	G2	G3	G4	G5	G6
SITUAÇÃO PROBLEMA 1	T1.1	Identificação de variáveis e de constantes numa situação	X	X	X	X	X	X
	T1.2	Cálculo de um valor constante	X	X	X	X	X	X
	T1.3	Relação entre as variáveis Generalização – representação algébrica	X	X	X	X	X	X
	T1.4	Representação gráfica Transposição da representação gráfica para a algébrica	X	X	**X**	X	X	**X**
	T1.5	Relação funcional	X	X	X	X	X	X
SITUAÇÃO PROBLEMA 2	T2.1	Identificação de variáveis Representação algébrica	X	X	X	X	X	X
	T22	Relação funcional entre as variáveis Representação algébrica	X	X	X	X	0	X
	T2.3	Representação geométrica Uso do Winplot	X	X	X	X	X	X
	T2.4	Relação funcional	X	X	X	X	X	X
	T2.5	Relação funcional	X	X	X	0	X	X
SITUAÇÃO PROBLEMA 3	T3.1	Papel dos parâmetros Coeficiente angular Uso do Winplot	X	X	X	X	X	X
	T3.2	Papel dos parâmetros Coeficiente angular Uso do Winplot	X	X	X	X	X	X
	T3.3	Papel dos parâmetros Generalização do particular para o geral	X	X	X	X	X	X
SITUAÇÃO PROBLEMA 4	T4.1	Papel dos parâmetros Representação gráfica - Inclinação da reta	X	X	X	X	X	X
	T4.2	Papel dos parâmetros Representação gráfica – interseção com o eixo	X	X	X	X	X	0
SITUAÇÃO PROBLEMA 5	T5.1	Representação algébrica a partir da geométrica	X	X	0	X	X	X
	T5.2	Representação geométrica	X	X	X	X	X	0

Quadro 2: Síntese das análises em relação ao objetivo da função afim

De forma geral os alunos tentaram realizar as tarefas, sendo que algumas duplas, grupos 1, 2 e 6, demonstraram maior apropriação do conceito, como se pode constatar no quadro 2, realizando de forma satisfatória a maioria das tarefas. Outros conseguiram realizar de modo completo algumas delas, especialmente as que exigiam menos o conceito da função afim. Embora os dados constantes desse quadro careçam de outros elementos para a análise da apropriação dos alunos desse conceito, algumas inferências são possíveis ao analisá-lo, considerando os objetivos das tarefas, os registros feitos e o referencial teórico adotado.

A formação de conceito, conforme afirma Vygostsky (1993), é caracterizada pela abstração e pela generalização e não é suficiente a percepção daquilo que é comum aos objetos que pertencem a uma dada classe para que ela ocorra. Podemos dizer que é essencial que haja o movimento da análise para a síntese e da síntese para a análise, ir do geral para o particular e do particular para o geral, para atingir o conceito.Retomando o que já citamos anteriormente, "Na verdadeira formação de conceitos, é igualmente importante unir e separar: a síntese deve combinar-se com a análise" (VYGOSTSKY, 1993, p. 66).

Nesse sentido, a apropriação do conceito de função afim para alguns alunos, mesmo depois de terem se aproximado dele na escola em vários momentos, nos parece um *pensamento por complexos*.Para alguns participantes, os elementos que constituem o conceito carecem de nexos e de significados, constituindo ainda um *pensamento por complexos*, ou *pseudo-conceito,*porque "[...] um conceito agrupa os objetos de acordo com um atributo, as ligações que unem os elementos de um complexo ao todo, e entre si, podem ser tão diversas quanto os contatos e as relações que de fato existem entre os elementos" (VYGOTSKY, 1993, p. 53). Esses participantes conseguem perceber as variáveis, perceber a relação nos casos particulares, mas não demonstram ter consciência daquilo que é geral. Não nos parece que esses alunos tenham construído uma "relação geral" e com isso uma "abstração substantiva" do assunto estudado, como nos fala Davydov (1988) ao falar do currículo escolar.

É importante pontuar que o recurso computacional, o *Winplot,*facilitou muito a resolução das tarefas. Possibilitou ao aluno desenvolvê-las de forma mais rápida e satisfatoriamente.Mas, por outro lado, parece deixar um lado "sombrio" em relação ao uso do conceitos da função afim, porque permite construir o gráfico utilizando um programa, para o qual precisa apenas digitar usar alguns comandos, constituindo-se numa tarefa que não expressa a apreensão do significado do conceito pelo aluno.

O próximo capítulo apresenta as análises realizadas sobre o conteúdo de função quadrática, sendo apresentadas cinco situações-problema realizadas pelos alunos. Apresentamos a análise de todo o conteúdo da mesma forma que o fizemos para a função afim:objetivo da tarefa, situação - problema, análise a *priori*, resposta esperada pelos alunos, resposta encontrada pelos alunos e análise a *posteriori*.

CAPÍTULO 4 – ANÁLISE DOS RESULTADOS: A APROPRIAÇÃO DA FUNÇÃO DO QUADRÁTICA

Do mesmo modo que no capítulo anterior, a análise será constituída de duas partes integradas, ou seja, no primeiro momento está a análise *a priori* e no segundo momento a análise *a posteriori*, sendo uma seguida da outra. Apresentamos também a atividade e os seus objetivos, para que o leitor possa acompanhar melhor o que está sendo relatado e analisado

4.1 Análise da situação-problema 6

*Objetivo:C*onstruir, a partir da equação que a representa, o gráfico de uma função quadrática, utilizando um recurso computacional.Identificar a função quadrática na situação a partir de sua equação. Analisar, no contexto da situação proposta, os sinais da função quadrática, o crescimento e o decrescimento.

Situação-problema: Você possui uma empresa, e seu lucro -$L(x)$ - (em mil reais) na comercialização de um dado produto pode ser calculado pela seguinte lei:

$$L(x) = -x^2 + 24x - 80$$

Sendo x o preço de venda unitária (em reais) desse produto. Assim, o lucro é uma função do preço unitário estabelecido.

Tarefa 6.1: Construa o gráfico, utilizando o *Winplot*. Você encontrou alguma dificuldade na construção deste gráfico utilizando este recurso? Quais foram os comandos que você utilizou para construir o gráfico utilizando, o *Winplot*? A atividade será considerada respondida, se você anexar a ela o *print screen* da tela de sua construção gráfica no *Winplot*.

*Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução:*Esperamos que o aluno consiga desenvolver a construção gráfica de uma função quadrática, utilizando o *software Winplot* e descrever quais foram os obstáculos encontrados para a sua representação. Considerando que a maioria dos alunos não desenvolve a representação gráfica, utilizando o recurso computacional, provavelmente, encontrarão dificuldade em visualizar o gráfico, visto que para será necessário alterar a escala. Alguns alunos, ainda podem tentar visualizar o gráfico resolvendo de forma manual, atribuindo valores para a variável x e encontrando os valores da variável y, para posteriormente tentarem visualizarem no gráfico.Poderão tratar a situação sem identificar nela a função quadrática.

Resposta esperada:

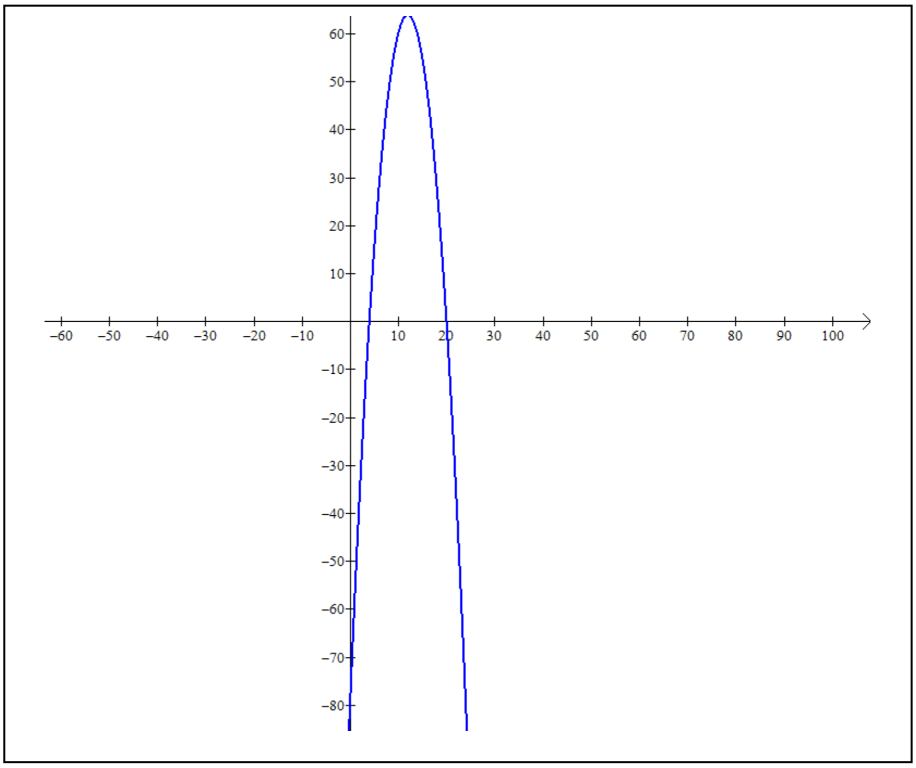
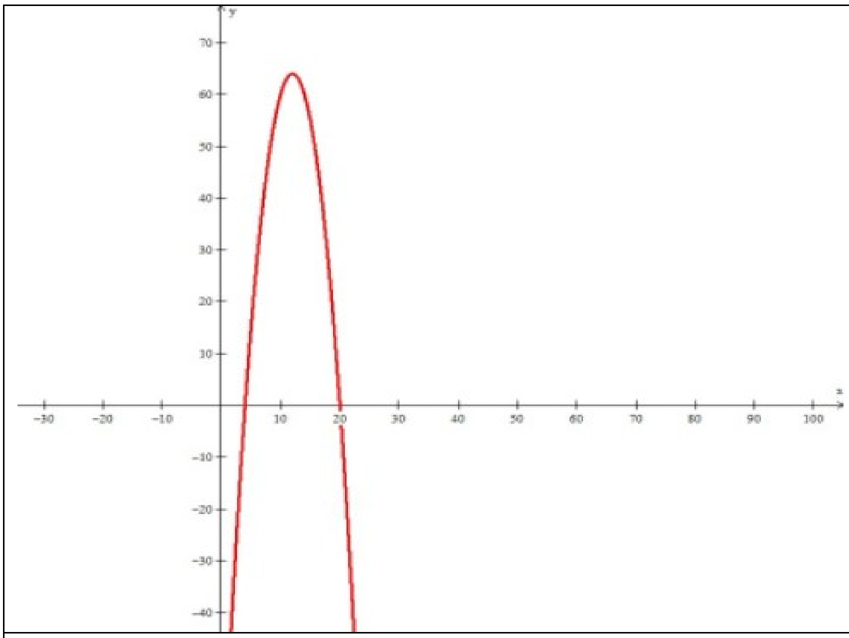
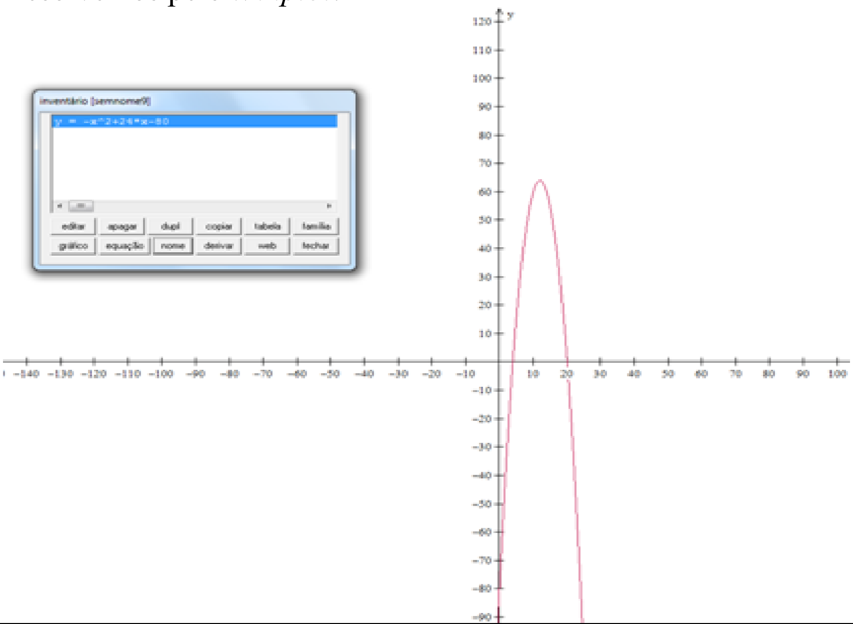
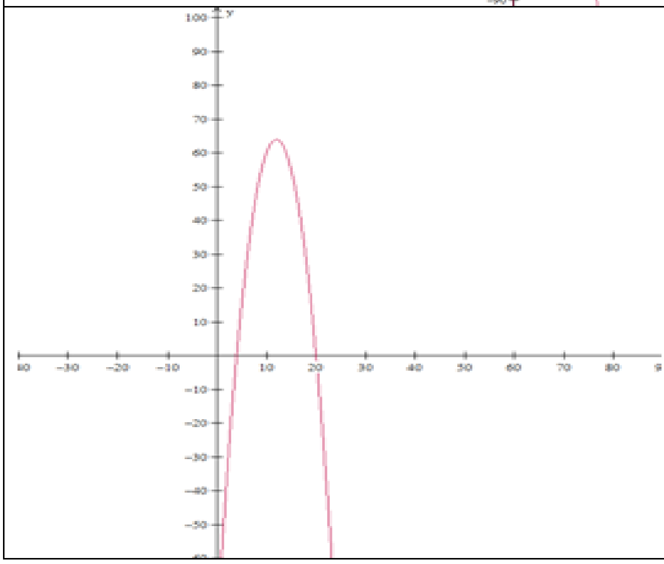
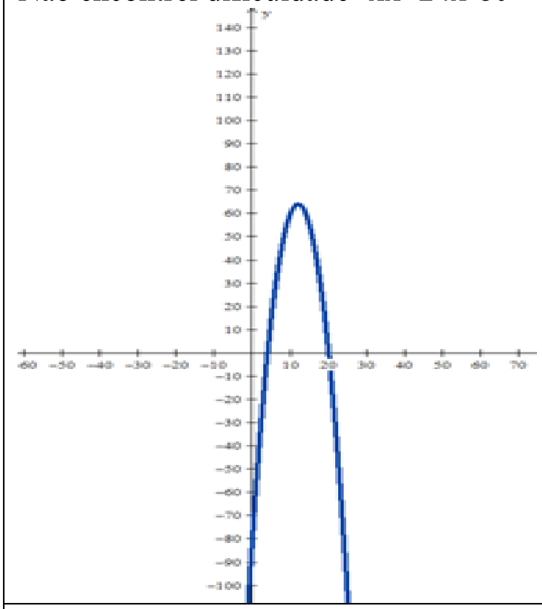
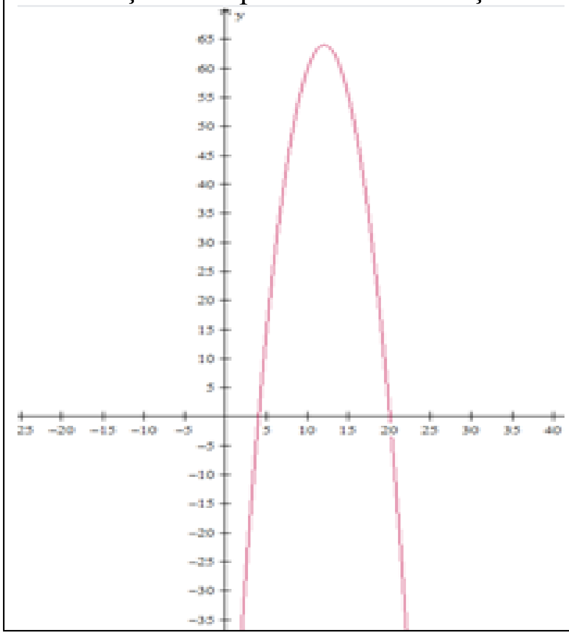


Figura 27: Gráfico do item 6.1

Resposta encontrada pelos alunos na Tarefa 6.1:

Resposta	**Sujeitos**
Equações - Explícita - digite a função f(x) e você terá o gráfico da função $y = x^2 + 24x - 80$. Não enviou por e-mail o gráfico feito no *software Winplot*.	Grupo 1
Equação - Explícita - (-x^2+24x-80) - ok - *pagedown.*	Grupo 2

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Resolvemos pelo Winplot.
</td><td>Grupo 3</td></tr>
<tr><td></td><td>Grupo 4</td></tr>
</table>

Não encontrei dificuldade -xx+24x-80 	Grupo 5
Não encontramos dificuldades e usamos os comandos equação, explícita. Usando a equação: $L(x)=x^2+24x-80$ Observação: a dupla escreveu a função faltando o sinal de menos. 	Grupo 6

Análise a posteriori: Os alunos não demonstraram dificuldades em resolver esta atividade. Mas, ainda sentem dificuldades em responder as atividades de forma completa, ou seja, foram solicitados a visualização gráfica e os comandos utilizados para determinar o gráfico utilizando o *Winplot,* e nem todos os alunos fizeram isso. O grupo1descreveu os comandos, mas não enviou por *e-mail* a visualização gráfica. Os grupos 2 e 6 responderam de forma completa. Os grupos 3 e 5 apenas demonstraram graficamente. E de todos os grupos, somente o grupo 6respondeu de forma mais completa possível a questão, pois era para descrever se havia encontrado dificuldades ou não, este grupo não encontrou dificuldades. Esse resultado contrariou a análise *a priori* de que os alunos teriam dificuldades na utilização do s*oftware*. Essa tarefa não exigia que o aluno tivesse se apropriado do conceito de função quadrática, pois o que ela, de fato, avaliou foi a habilidade do aluno para manusear o software a partir da equação. Os alunos não apresentaram dificuldades em mudar a escala no software *Winplot*.

Tarefa 6.2: Analise para quais valores de *x* o lucro é positivo?

Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução. Para analisar quando o lucro é positivo, o aluno precisará realizar o estudo do sinal desta função, verificando o intervalo em que a função assume os valores positivos. Alguns alunos terão dificuldades em aplicar os conceitos matemáticos aos conceitos envolvidos na situação, como por exemplo, interpretar o lucro.

Resposta esperada:

$- x^2 + 24x - 80 = 0$

$D = 256$

$Raízes: 4 \text{ e } 20$

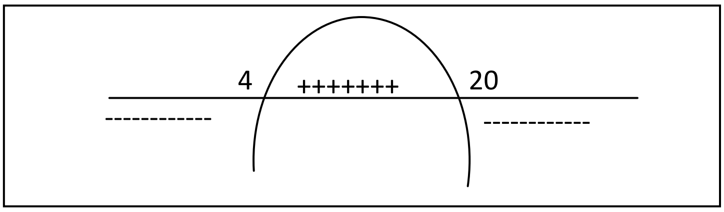


Figura 28: Análise do sinal do item 6.2

Assim o lucro será positivo quando $4 < x < 20$

Resposta encontrada pelos alunos para a Tarefa 6.2

Resposta	**Sujeitos (S)**
Quando x maior que 4.	Grupo 1
Analisando graficamente aproximadamente o lucro é positivo quando x > 4,2 e x < 19,8.	Grupo 2
De aproximadamente x = 4 até x = 20 o lucro será positivo.	Grupo 3
Intervalo de 0 a 10.	Grupo 4
Intervalo de 4 até 20 no eixo x.	Grupo 5
de 4 até 20.	Grupo 6

Análise a posteriori Nenhum grupo utilizou o procedimento previsto na análise *a priori*, resolver a tarefa utilizando as ferramentas algébricas. Todos os grupos apenas basearam-se no gráfico. Somente o grupo 2 colocou o lucro escrito na forma de um intervalo, utilizando a linguagem algébrica, com números aproximados. Os grupos 3, 5 e 6descrevem que é um intervalo que vai de quatro até vinte. O grupo 4 não conseguiu determinar o intervalo corretamente e o grupo 1, parcialmente.

Os resultados obtidos nesta tarefa nos permitem inferir que os alunos preferem trabalhar com a representação geométrica do que com a algébrica. Neste sentido, os recursos computacionais, no caso o *software Winplot,* contribuem para a apreensão dos significados de determinados componentes e propriedades dos conceitos em estudo, pois permitem a sua visualização e observação do papel de cada um deles, dado a dinamicidade que eles comportam.

Tarefa 6.3: O lucro pode ser nulo? Se sim, para quais valores?

Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução. Os alunos precisam saber que as raízes da equação determinam o lucro nulo. Para determinação das raízes os alunos poderão utilizar a fórmula de Bhaskara, a relação entre soma e produto das raízes ou buscar, por meio do *software*, a identificação destes pontos.

*Resposta esperada:*O lucro será nulo quando x = 4 e x = 20.

Resposta encontrada pelos alunos na Tarefa 6.3

Resposta	**Sujeitos (S)**
Sim se x for igual 4.	Grupo 1
Aproximadamente x = 4,2 e x = 19,8	Grupo 2
Se não houver venda	Grupo 3
Não	Grupo 4
Sim (0,4) e (0,20)	Grupo 5
Sim, nos pontos4 e 20	Grupo 6

Análise a posteriori: Para responder a esta atividade o aluno precisa compreender que o lucro é nulo quando y = 0, ou seja, L(x) = 0. Os grupos3 e 4não conseguiram compreender este conceito e responderam não a lucro nulo, porque utilizaram um pensamento empírico, de acordo com o qual se há venda, há lucro. O grupo provavelmente errou ao realizar a representação dos pontos, mas não comentou esta atividade durante a gravação do áudio. O grupo 1 determinou somente uma das respostas. O grupo 2 determinou a resposta, apesar de trabalhar com aproximação, pois trabalhou somente com a análise gráfica e não,com cálculos algébricos. E o grupo 6 determinou os valores corretos, mas não especificou se são referentes a x ou y.

Tarefa6.4: Analise para quais valores de *x* o lucro é crescente?

Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução. Para definir em que intervalo o lucro será crescente, o aluno precisará tomar como referência o vértice da parábola. Alguns poderão estabelecer uma relação indevida entre o intervalo de lucro positivo e o intervalo de lucro crescente. A determinação do vértice poderá ser feita utilizando as fórmulas ou a partir da análise do gráfico. Como não é possível ter preços “negativos”, consideramos como solução apenas o intervalo não negativo. Em se tratando de uma função quadrática com a concavidade voltada para baixo, visto que o coeficiente “a” é negativo, pode-se concluir que a função será crescente até o vértice da parábola.

Resposta esperada:

Utilizando o vértice da parábola, temos: $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{24}{2\cdot(-1)} = 12$

Logo, a função, ou melhor, o lucro, será crescente no intervalo: $4 < x < 12$.

Resposta encontrada pelos alunos na Tarefa 6.4

Resposta	**Sujeitos (S)**
Quando x>4 e menor que 10.	Grupo 1
Para nenhum, pois o gráfico é decrescente.	Grupo 2
Para os valores de x=4 até x=11 o lucro é crescente.	Grupo 3
Teve prejuízo o gráfico é decrescente teve mais gasto do que ganho.	Grupo 4
A partir do 4 até o 20.	Grupo 5
De 4 até 12.	Grupo 6

Análise a posteriori: Todos os grupos responderam apenas analisando o gráfico e não utilizando nenhum cálculo algébrico, contrariando o previsto na análise *a priori*. Os grupos2 e 4 não determinaram a resposta correta, e parecem ter empregado um pensamento empírico, em que o modelo matemático está dissociado da situação. O grupo 1determinou o valor inicial de forma correta, mas o valor final teria que ser menor ou igual a doze, e, não, igual a dez. O grupo não escreveu os valores encontrados em forma de intervalo, numa linguagem matemática. O grupo5 não especificou se os valores determinados correspondem à variável x ou y, e também errou o valor final do intervalo. O grupo 6 determinou os valores corretos, apesar de não identificar se corresponde à variável dependente (y) ou independente (x). Este último grupo determinou a resposta por tentativas, segue abaixo um trecho do diálogo:

Sujeitos da dupla	**Diálogos**
S1	Tem que ver até aqui
S2	Até 65...
S1	É mais até o 12, né?
S2	Até 64, até o 12?
S1	Até o 12, vai ser entre 4 ate 12
S2	de 4 a 12
S1	4 e 20?
S2	12....
S1	Vamos, joga o outro
S2	Aha, é muito mais né...

Novamente, o aluno faz opção pela análise do gráfico, sem fazer cálculos algébricos.Nesta situação, fica claro que o aluno estabelece relações baseadas no que visualiza, no plano do pensamento empírico que se limita a comparar os dados sensoriais concretos. A própria situação proposta conduz a esse tipo de pensamento na medida em que propõe a análise do crescimento, estando o aluno de posse do gráfico. O diálogo revela que o aluno chega à resposta por tentativa, sem atentar para um elemento caracterizador da função quadrática que é a existência de um único ponto de máximo ou de mínimo, que é o seu vértice.

4.2Análise da situação-problema 7

Objetivo: Permitir a aplicação do estudo das funções linear e quadrática a uma situação problema. Ampliar o conceito de função linear e quadrática. Identificar qual a abordagem pedagógica que mais favorece a resolução da situação problema – por meio do *Winplot* ou sem o seu uso.

*Situação-problema:*As empresas "*Quero Quero"* e *"Tico Tico"* comercializam o mesmo produto. Seus lucros diários variam de acordo com o número de unidades vendidas (x), segundo as funções, dadas por:

- Empresa "*Quero Quero":* $Q(x) = x^2 - 20x + 187$
- Empresa *"Tico Tico":* $T(x) = 135 + 8x$

Assim , o lucro é função do número de unidades vendidas pelas empresas.

Tarefa 7.1: Em qual intervalo de unidades vendidas (x) o lucro da empresa *"Tico Tico"* supera o lucro da empresa "*Quero Quero"*?

*Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução.*Para analisar em qual intervalo o lucro de uma empresa supera o da outra, o aluno pode utilizar várias estratégias. Primeiramente, ele pode encontrar diretamente a resposta da questão utilizando conhecimentos sobre inequação, ou seja, já determinando que a expressão que representa o lucro da empresa "Tico Tico" deve ser maior que a da empresa "Quero Quero". O desenvolvimento da resolução conduz a uma inequação quadrática,em que se busca um intervalo real que forneça valores da função maiores do que zero. A solução de inequações desse tipo requer a análise de sinal da função quadrática obtida. Na análise de sinal será necessário determinar as raízes da equação, sendo que, para isso, os alunos poderão utilizar a fórmula de Bhaskara ou a relação entre soma e produto das raízes. Outra solução possível é o aluno atribuir valores para a variável x, encontrando os valores da variável y, e assim determinar em qual intervalo uma empresa supera o lucro da outra. Mas, não se pode deixar de considerar que a hipótese mais provável, é que o aluno construa o gráfico das duas funções, embora haja uma restrição de domínio, pois a variável assume apenas valores inteiros não negativos. Desta forma, ele poderá analisar graficamente em qual intervalo uma empresa supera o lucro da outra. Considerando-se que os pontos de interseção dos dois gráficos determinam o intervalo de lucro entre as duas empresas, é possível observar que o gráfico da função afim estará acima do gráfico da função quadrática.

*Resposta esperada:*Deseja-se saber em qual intervalo $T(x)$ é maior que $Q(x)$. Para tanto, deve-se resolver a seguinte inequação:

$T(x) > Q(x)$

$135 + 8x > x^2 - 20x + 187$

$-x^2 + 8x + 20x + 135 - 187 > 0$

$-x^2 + 28x - 52 > 0$

A solução da última inequação é dada por meio do estudo de sinal da função $g(x) = -x^2 + 28x - 52$.

Portanto, o estudo de sinal é dado por:

$\Delta = 576$

Raízes 2 e 26

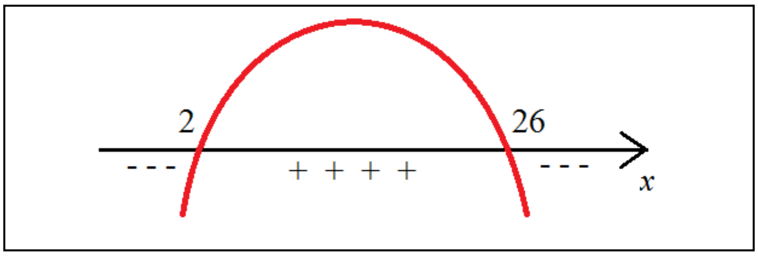


Figura 29: Análise do sinal do item 7.1

O lucro da empresa Q(x) é maior dentro do intervalo $2 < x < 26$ unidades vendidas.

Resposta encontrada pelos alunos na Tarefa 7.1

Resposta	**Sujeitos**
$y_v = -\left(\frac{\Delta}{4a}\right)$ $y_v = -\left(\frac{(-20)^2 - (4.1.187)}{4}\right)$ $y_v = -\left(\frac{400 - 748}{4}\right)$ $y_v = -\left(\frac{-348}{4}\right)$ $y_v = -(-87)$ $y_v = 87$ $x_v = -\left(\frac{-20}{2}\right)$ $x_v = -(-10)$ $x_v = 10$ $(10, 87)$	Grupo 1
Aproximadamente x = 30	Grupo 2
Quando x = 26	Grupo 3

$\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = 20^2 - 4.1.187$ $xV = \frac{20}{2} = 10$ $yV = \frac{-\Delta}{4a}$ $yV = 87$ intervalo de = 10 a 87	Grupo 4
Calculo feito apartir de X=1 Empresa "Ouro Ouro" → 1-20+187=168 reais " "Tico Tico" → 135+8·1=143 reais ~~apartir~~ apartir do valor 943 no eixo y.	Grupo 5
Aproximadamente no ponto 345	Grupo 6

*Análise a posteriori:*Nenhum dos grupos respondeu de acordo com o previsto na análise *a priori*. Os conhecimentos sobre inequações e sua análise de sinal para determinar o lucro da empresa necessários para resolver a tarefa não foram mobilizados pelos alunos. Os grupos 1 e 4 tentaram resolver a atividade pelo cálculo do x e y do vértice, talvez considerando a importância desse ponto para a função quadrática dada, desconsiderando que estava em jogo também uma função afim e que a atividade exigia uma comparação entre elas. Outro grupo atribuiu o valor1 para a variável x, realizando a atividade por tentativa. O grupo 6de acordo com as observações realizadas na transcrição do áudio, apenas analisou o gráfico, dando a ordenada de um dos pontos de intersecção. Os grupos 2 e 3 apenas colocaram o valor de x sem realizar nenhuma análise, e não deixaram claro na gravação de áudio quais os procedimentos utilizados.A análise das produções dos participantes nessa tarefa permite inferir que os alunos agiram diante da situação, considerando elementos das funções de forma desconexa, demonstrando a falta de movimento do geral para o particular. Além disso, a discussão sobre o domínio das funções também não aparece.

Tarefa 7.2 Faça a construção gráfica destas funções atribuindo valores para a variável x, determinado assim os valores os valores para a variável y.

Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução. Os alunos irão construir os gráficos de forma manual, atribuindo valores para a variável x e encontrando os valores da variável y. Podemos encontrar alunos que tentarão resolver de forma manual, primeiramente,antes de utilizar o *Winplot*, assim a representação gráfica pode estar incorreta, pois alguns alunos apresentam muitas dificuldades em realizar essas representações graficamente. Outra questão relevante é que durante a construção gráfica muitos não utilizam a régua ou mesmo não possuem o hábito de trazer este material escolar, assim a escala do gráfico pode ficar comprometida. Outra possibilidade, é de que o aluno utilize as características da função: raízes, coordenadas do vértice, sentido da concavidade e intercepto com o eixo y, demonstrando apropriação dos conceitos.

Resposta esperada:

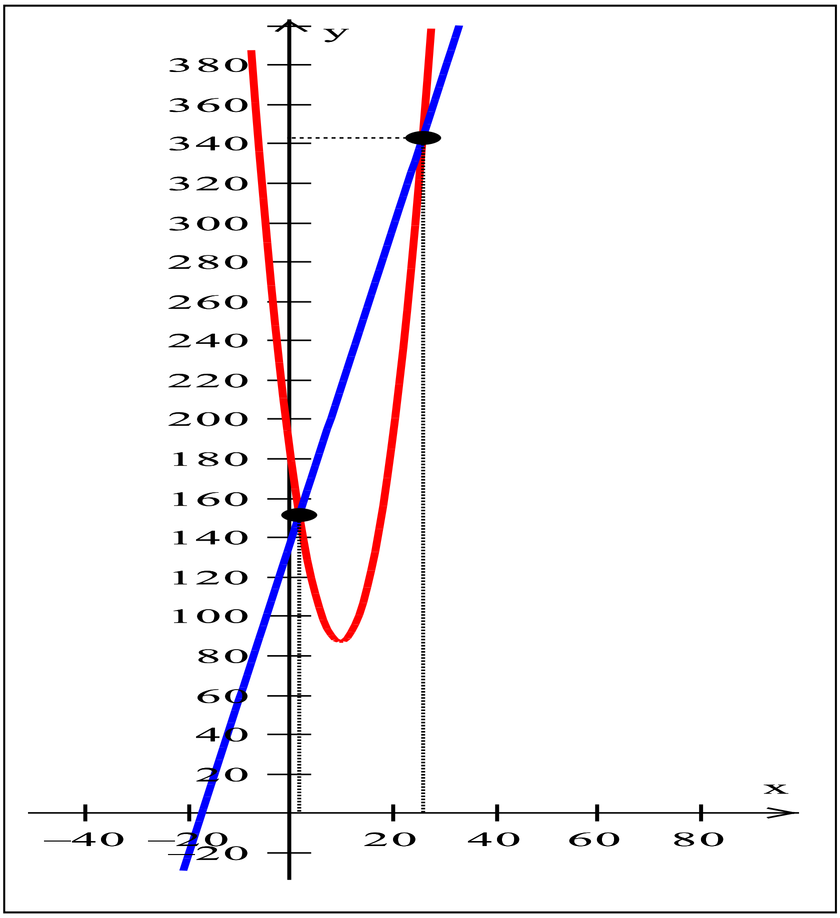
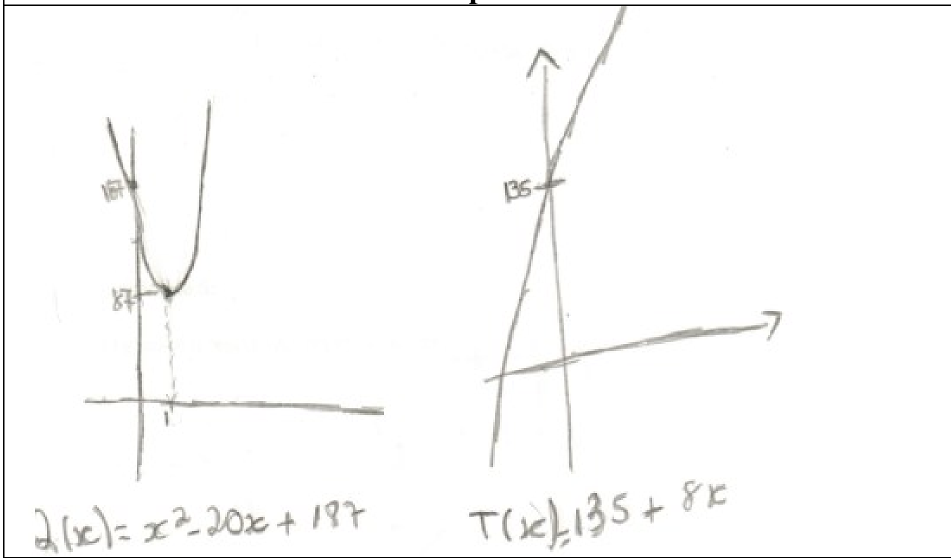
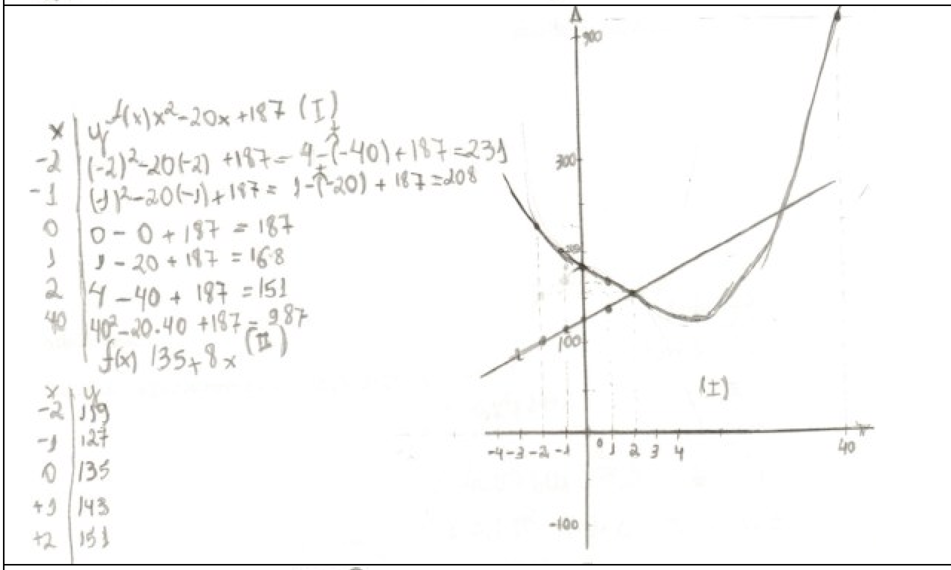
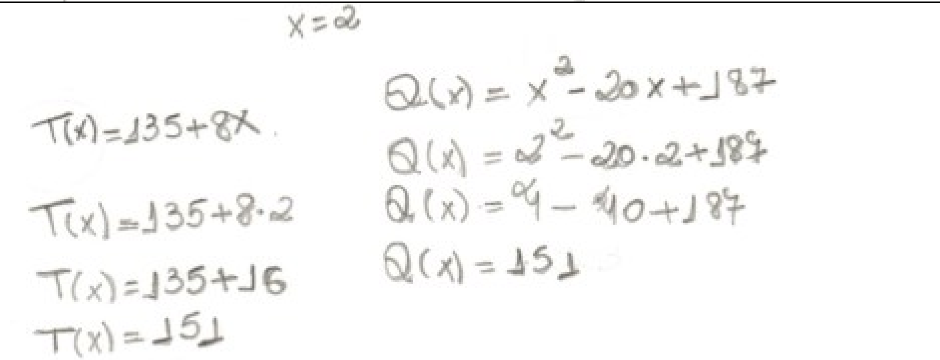
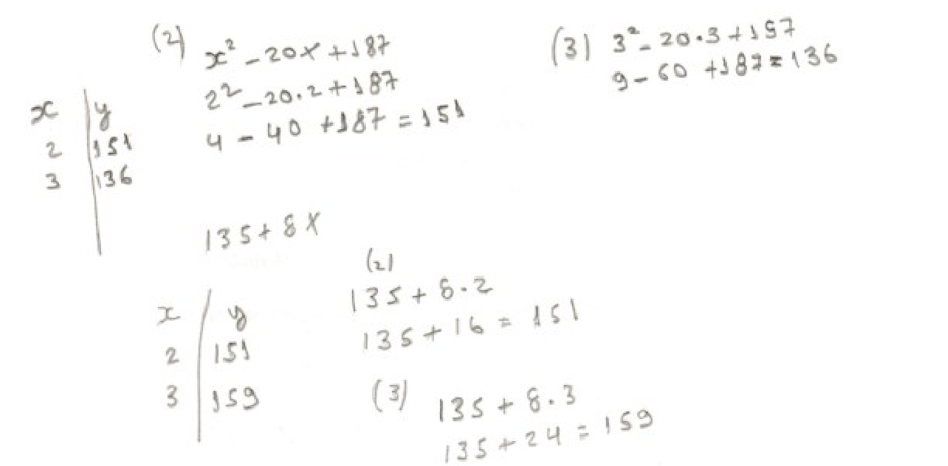


Figura 30: Gráfico do item 7.2

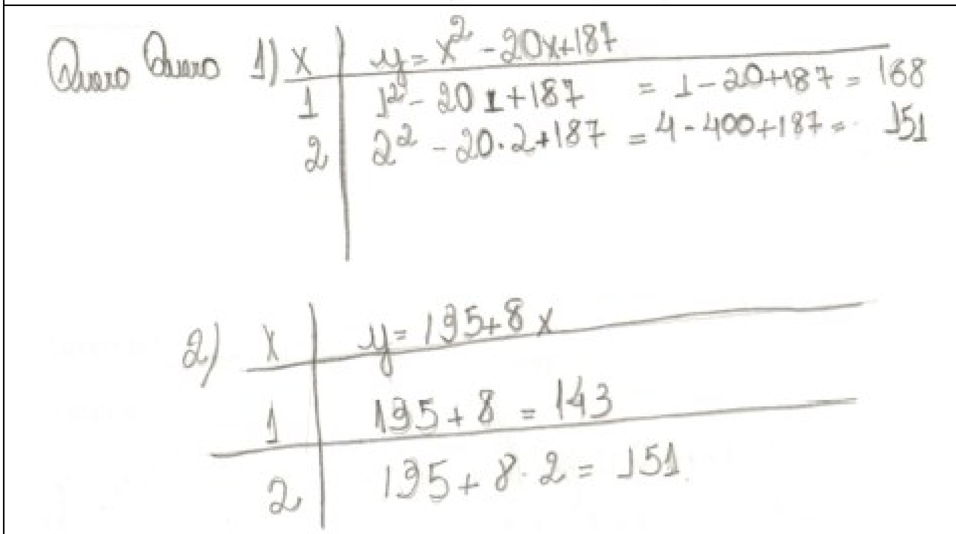
Espera-se que o estudante tenha observado que a reta, que representa a função $T(x)$, ficou acima da parábola, função $Q(x)$ no intervalo de 2 a 26. Portanto o lucro maior para a empresa “Tico Tico” está neste intervalo de unidades vendidas.

Resposta encontrada pelos alunos na Tarefa 7.2

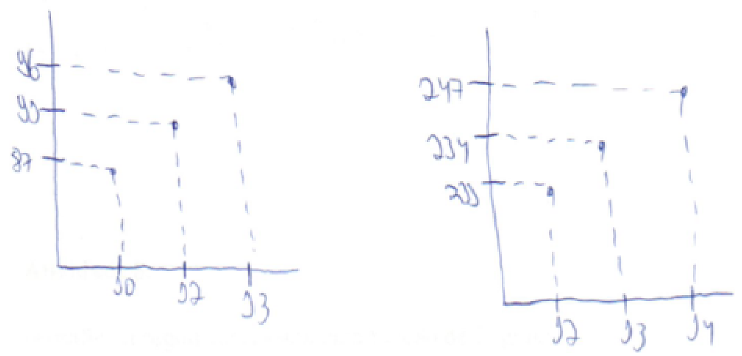
Resposta	Sujeitos
	Grupo 1
	Grupo 2
	Grupo 3



Grupo 4



Grupo 5



Grupo 6

Análise a posteriori: Os alunos sentem muitas dificuldades em realizar a construção de gráficos de forma manual, pois é um tipo de atividade que exige a apropriação dos conceitos das funções em estudo, isto é, a abstração do que em geral em cada delas, os elementos caracterizadores. A resolução por tentativa, atribuindo valores aleatórios às variáveis, quando estão envolvidos números grandes, é quase sempre. Os grupos 4, 5 e 6 não conseguiram realizar a construção gráfica.

O grupo 1utilizou alguns elementos caracterizadores das funções para a construção gráfica. Para a função do 2º grau do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, identificou que o elemento c representa o ponto que intersecta o eixo y (0, 187), determinou o ponto de mínimo da função (10,87). E para a função de 1º grau do tipo f(x) = ax+b, somente identificou que o coeficiente linear toca o eixo y no ponto (0,135). É possível perceber que esse grupo tem apropriação dos conceitos envolvidos.

O grupo2 construiu uma tabela na qual atribuiu valores para a variável independente (x), encontrando os valores para a variável dependente (y). Um ponto que ficou falho na resposta deste grupo, foi que não utilizou uma escala para a sua construção. Mas, esta possibilidade já estava prevista na análise *a priori*.Também não fizeram uso dos pontos caracterizadores das funções.

Tarefa 7.3 Represente, graficamente, no mesmo plano cartesiano, as duas funções, utilizando o *Winplot*.

Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução. Espera-se que o aluno consiga desenvolver a construção gráfica de uma função quadrática e linear, utilizando o *software Winplot*. Considerando-se que a maioria dos alunos não desenvolvem a representação gráfica, utilizando o recurso computacional, provavelmente, encontrarão dificuldade em obter o gráfico, visto que para visualizá-lo será necessário alterar a escala. Alguns alunos, ainda, podem tentar essa visualização de forma manual, atribuindo valores para a variável x e encontrando os valores da variável y, para posteriormente tentarem visualizar o gráfico no *Winplot*.

Resposta esperada:

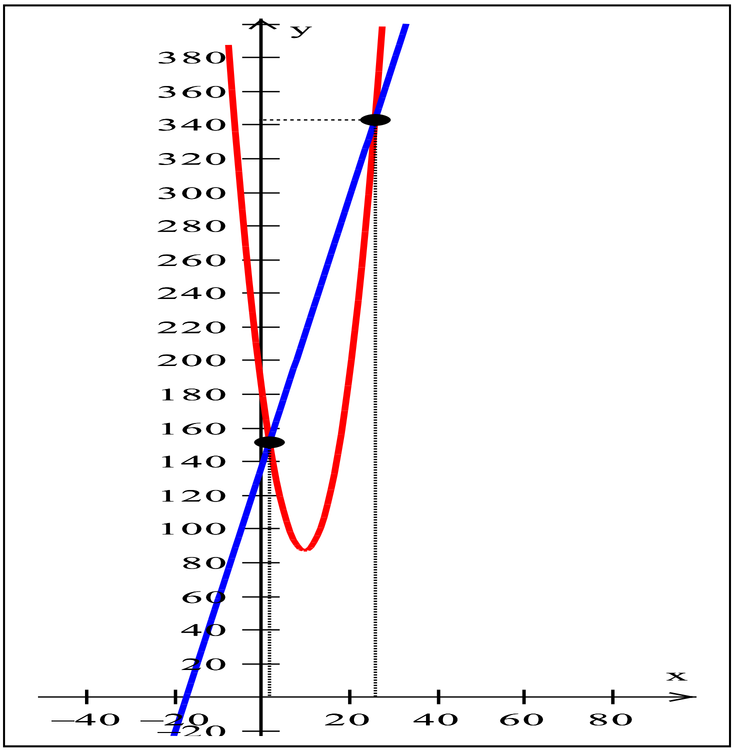
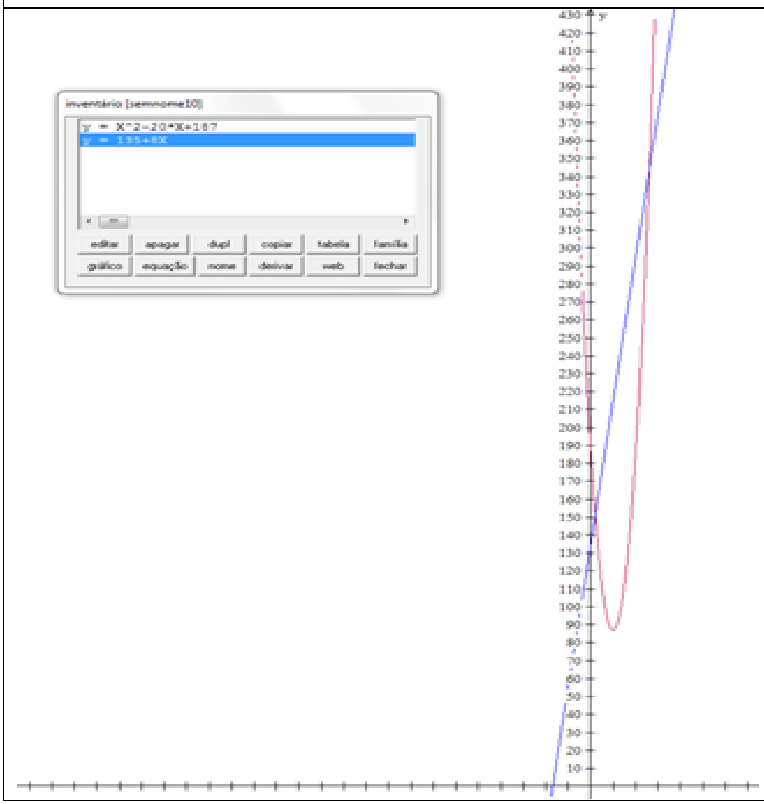
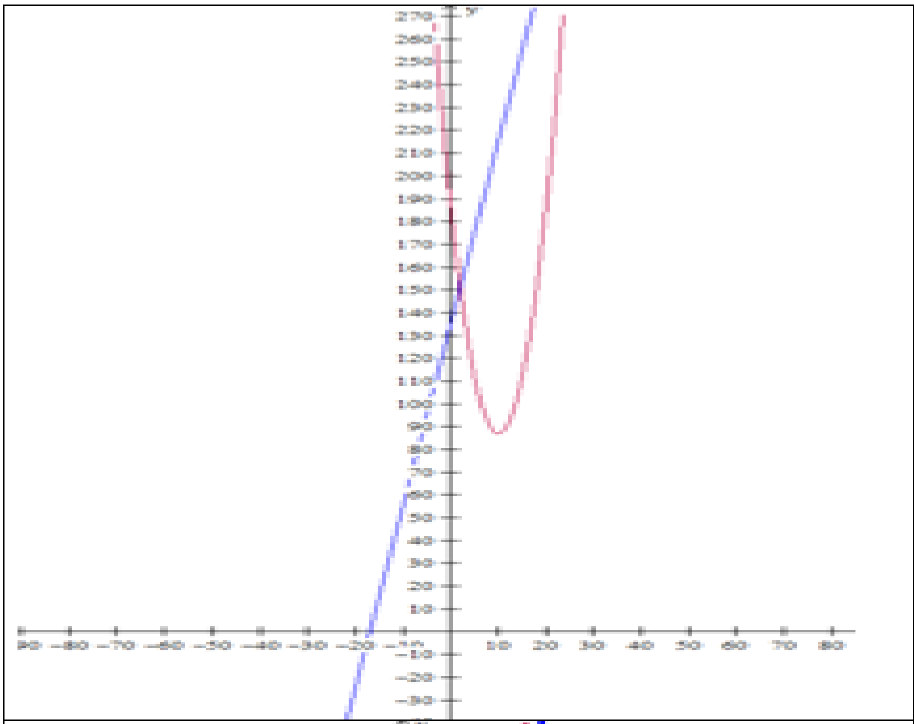
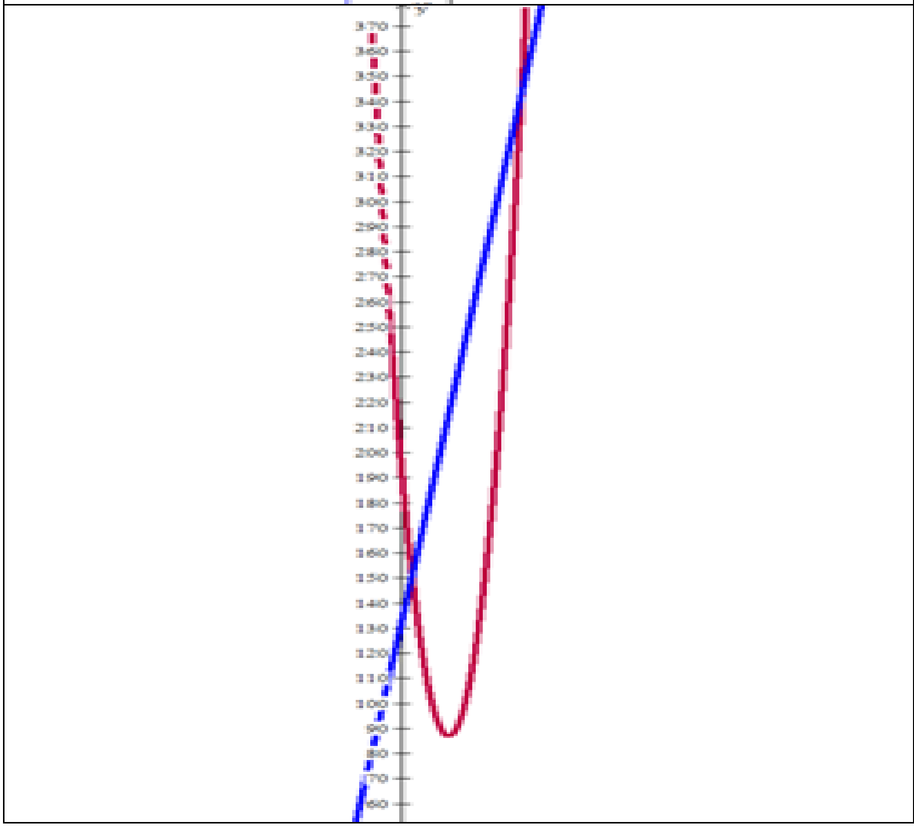
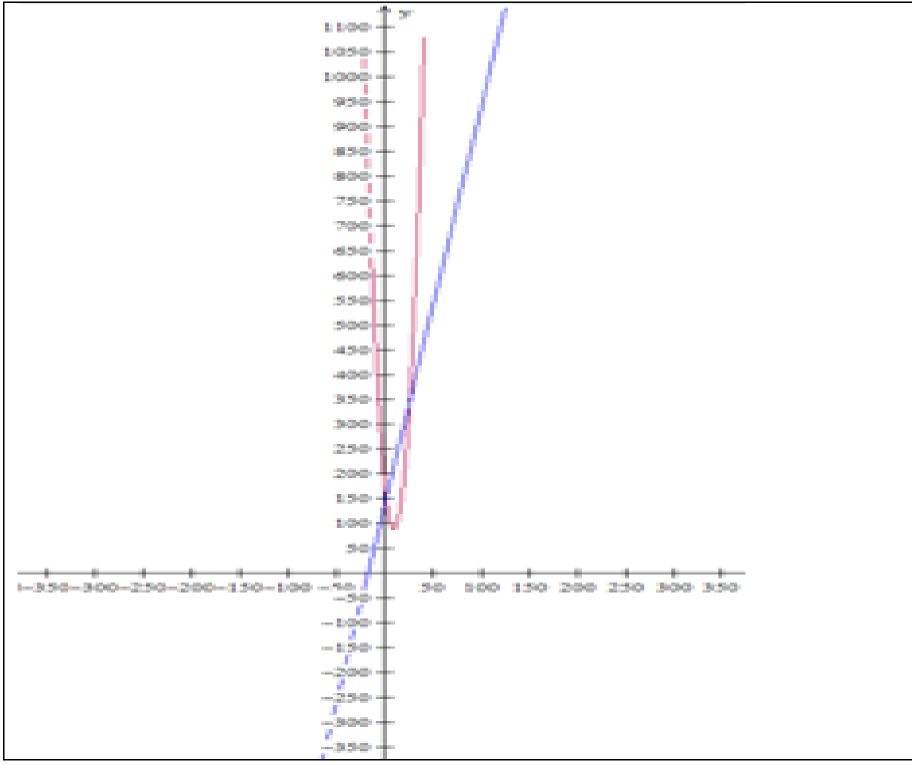


Figura 31: Gráfico do item 7.3

Resposta encontrada pelos alunos na Tarefa 7.3

Resposta	Sujeitos
Em branco	Grupo 1
Em branco	Grupo 2
	Grupo 3

	Grupo 4
	Grupo 5

	Grupo 6

Análise a posteriori: Os grupos de forma geral não tiveram dificuldades em utilizar o software *Winplot* para realizar a construção gráfica, contrariando a nossa expectativa na análise *a priori*. De fato, pode-se inferir que, uma vez dominados os comandos, os alunos não têm dificuldade em manusear o *software*, ainda que não respondam ao solicitado na tarefa. Esse fato pode ser observado em relação aos Grupos 3, 4, 5 e 6.A falta de adaptação da escala, uma limitação no uso do software, pode ter dificultado a identificação dos valores que limitam o intervalo onde T(x) > Q(x). Os Grupos 1 e 2 não enviaram a resposta por e-mail, assim a questão foi considerada em branco.Essa tarefa permite inferir que o uso do recurso tecnológico facilitou a obtenção do gráfico, mesmo tendo os alunos demonstrado não terem uma apropriação do conceito das funções, como constatamos na tarefa anterior. Nesse sentido, podemos afirmar que, sem uma intervenção pedagógica do professor, o *software* permite a realização da tarefa, mas não agrega no que respeita à formação do conceito.

Tarefa 7.4: Qual a estratégia foi mais fácil para você: - o uso do *Winplot* ou a representação sem o seu uso? Descreva o que ajuda e o que dificulta em cada uma destas estratégias.

Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução. O aluno irá descrever que o *Winplot* agiliza a construção gráfica, mas que o professor não irá deixar utilizar em uma avaliação. Outros poderão responder que sentiram dificuldades no manuseio do *Winplot*, por não estarem acostumados a utilizá-lo, assim preferem realizar a construção manualmente. Alguns podem não conseguir realizar a construção devido à necessidade da mudança na escala do *Winplot*, apesar de ser uma habilidade já desenvolvida em uma disciplina do curso.

*Resposta esperada:*Descrever quais foram as facilidades ou dificuldades encontradas em realizar as construções gráficas nos dois itens anteriores.

Resposta encontrada pelos alunos na Tarefa 7.4

Resposta	**Sujeitos**
Pelo *Winplot*, pois é mais prático e rápido. A dificuldade de se fazer manual é a interpretação da função.	Grupo 1
Em branco	Grupo 2
Com o uso do *Winplot*.	Grupo 3
No *Winplot*. Porqueo tempo que você perde, calculando, no *Winplot* você consegue o mesmo resultado somente analisando o gráfico com extrema facilidade.	Grupo 4
O *Winplot*. Primeiro pela facilidade e mais rápida análise do gráfico.	Grupo 5
Winplot é mais fácil pois podemos determinar a escala e o gráfico se apresenta automaticamente.	Grupo 6

Análise a posteriori: A sala, de forma geral, é composta de alunos mais jovens, que não demonstraram dificuldades no manuseio de um computador. Assim cinco grupos responderam que utilizar o software *Winplot* facilita a construção dos gráficos, pois afinal não precisam conhecer alguns conceitos matemáticos, utilizar régua ou escala para representar de forma manual. Apenas um grupo deixou em branco a resposta. O que inferimos anteriormente, analisando os resultados de tarefas anteriores, com relação ao uso do software se confirmou na escrita dos alunos. Assim esses recursos devem fazer parte da organização da atividade de ensino, embora o trabalho com os elementos caracterizadores do conceito seja imprescindível.A resposta do grupo 1 confirma essa constatação, quando escrevem que “A dificuldade de se fazer manual é a interpretação da função”.

4.3Análise da situação-problema 8

Objetivo: Permitir a aplicação do estudo da função quadrática a uma situação problema, fazendo o movimento do geral para o particular. Ampliar o conceito de função quadrática.Identificar qual a abordagem pedagógica que mais favorece a resolução da situação-problema.

*Situação-Problema:*O gráfico a seguir representa uma função polinomial de 2º grau:

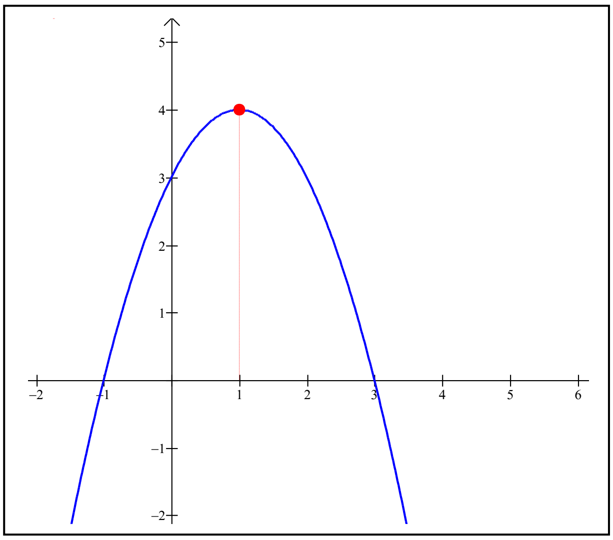


Figura 32: Gráfico da atividade 8

Tarefa 8.1: Com base no gráfico, determine a lei de formação da função.

Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução. Uma das estratégias de resolução para determinar a função representada por este gráfico, é montar um sistema de equações lineares, utilizando três pontos pertencentes a ele, por exemplo, os pontos que interceptam o eixo x (-1, 0) e (3, 0), ou seja, as raízes da função; também é possível visualizar o ponto do vértice da parábola (1, 4) e o ponto que intercepta o eixo y (0, 3). Assim, o aluno irá escrever um sistema composto por três equações lineares determinadas a partir da equação geral: $y = ax^2 + bx + c$. Encontrando o conjunto solução do sistema, o aluno irá determinar a lei de formação da função quadrática representada pelo gráfico. Mas, o aluno pode optar por outro tipo de resolução, utilizando a forma canônica do tipo: a·(x – x')·(x – x"), considerando que os pontos que interceptam o eixo x são as raízes da equação, e que a concavidade da parábola está voltada para baixo, assim o valor de "a" deve ser negativo.

Resposta esperada:

Graficamente, é possível determinar os seguintes dados:

Raízes: – 1 e 3

Vértice: (1 , 4)

Coeficiente $c = 3$

Sabe-se que a lei geral de uma função quadrática é dada por:

$y = ax^2 + bx + c$

Usamos os pontos conhecidos (– 1 , 0) ; (3 , 0); (1 , 4) e (0 , 3) na lei de formação geral para determinar os coeficientes da expressão que define a função:

De (0 , 3), temos $3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 3$

De (– 1 , 0), temos $0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 3 \Rightarrow a - b = -3$

De (1 , 4), temos $4 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 3 \Rightarrow a + b = 1$

Pode-se determinar o valor de *a* e *b* através do sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} a - b = -3 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

Por adição, ficamos com a equação $2a = -2 \Rightarrow a = -1$.

Substituindo $a = -1$ na 1ª equação, obtemos:

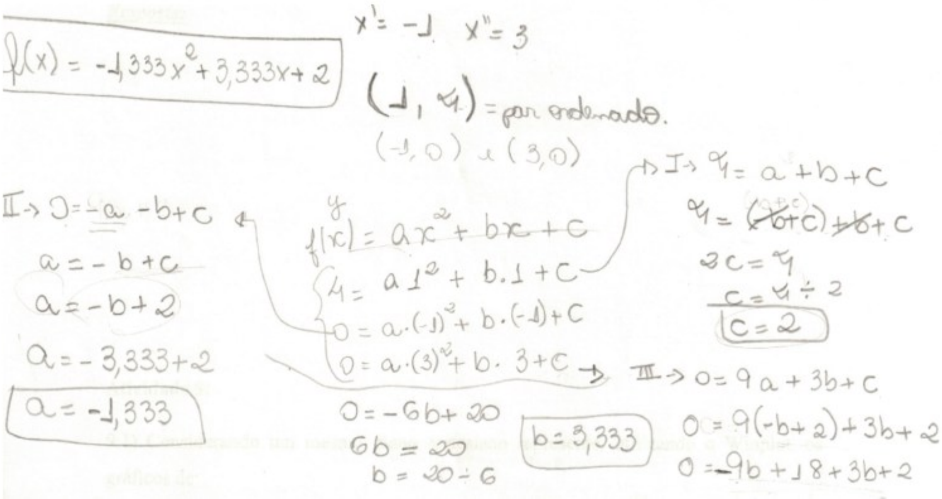
$-1 - b = -3 \Rightarrow -1 + 3 = b \Rightarrow b = 2$

Portanto, a lei de formação da função dada pelo gráfico é:

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$

Resposta encontrada pelos alunos para a Tarefa 8.1

Resposta	**Sujeitos**
$y = -x^2 + 2x + 3$	Grupo 1
$-x^2 - 3x + 3 = 0$	Grupo 2

<table>
<tr><td>
$\boxed{f(x) = -1{,}333x^2 + 3{,}333x + 2}$
$x' = -1 \quad x'' = 3$
$(1, 4)$ = par ordenado.
$(-1, 0)$ e $(3, 0)$
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$4 = a1^2 + b.1 + c$
$0 = a.(-1)^2 + b.(-1) + c$
$0 = a.(3)^2 + b.3 + c$
I → $4 = a + b + c$
$4 = (\cancel{a} - b + c) + \cancel{b} + c$
$2c = 4$
$c = 4 \div 2$
$\boxed{c = 2}$
II → $0 = -a - b + c$
$a = -b + c$
$a = -b + 2$
$a = -3{,}333 + 2$
$\boxed{a = -1{,}333}$
III → $0 = 9a + 3b + c$
$0 = 9(-b + 2) + 3b + 2$
$0 = -9b + 18 + 3b + 2$
$0 = -6b + 20$
$6b = 20$
$b = 20 \div 6$
$\boxed{b = 3{,}333}$</td><td>Grupo 3</td></tr>
<tr><td>$y = -x^2 + 2x + 3$</td><td>Grupo 4</td></tr>
<tr><td>$-x^2 + 2x + 3$</td><td>Grupo 5</td></tr>
<tr><td>$-x^2 + 2x + 3$</td><td>Grupo 6</td></tr>
</table>

Análise a posteriori: Nesta atividade tivemos que realizar algumas intervenções sobre como resolver um sistema de equações e a forma geral de um de um polinômio de 2º grau, $P(x) = ax^2 + bx + c$. Os grupos 1, 4, 5 e 6 conseguiram determinar a resposta prevista na análise *a priori,* mas não deixaram demonstrado qual procedimento utilizaram para determinar a resposta da tarefa, e não está claro na gravação de áudio. Mas os grupos 5 e 6 não utilizaram a linguagem matemática adequada, deixando de indicar a variável dependente (y). Os grupos1 e 4 conseguiram determinar a resposta de forma correta. O grupo 2foi o único que deixou o processo de resolução, até inicia a atividade de forma correta,mas, errou na determinação dos valores da seguinte equação:

$$0 = a(-1)^2 + b(-1) + c$$
$$0 = -a - b + c$$

Ao calcular o valor de $(-1)^2$ colocaram como resposta "-a". Se não fosse esse erro estariam no caminho correto de resolução.

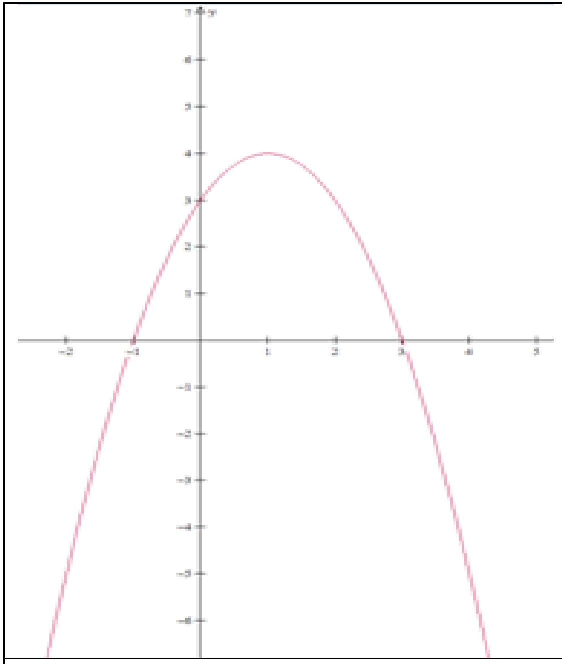
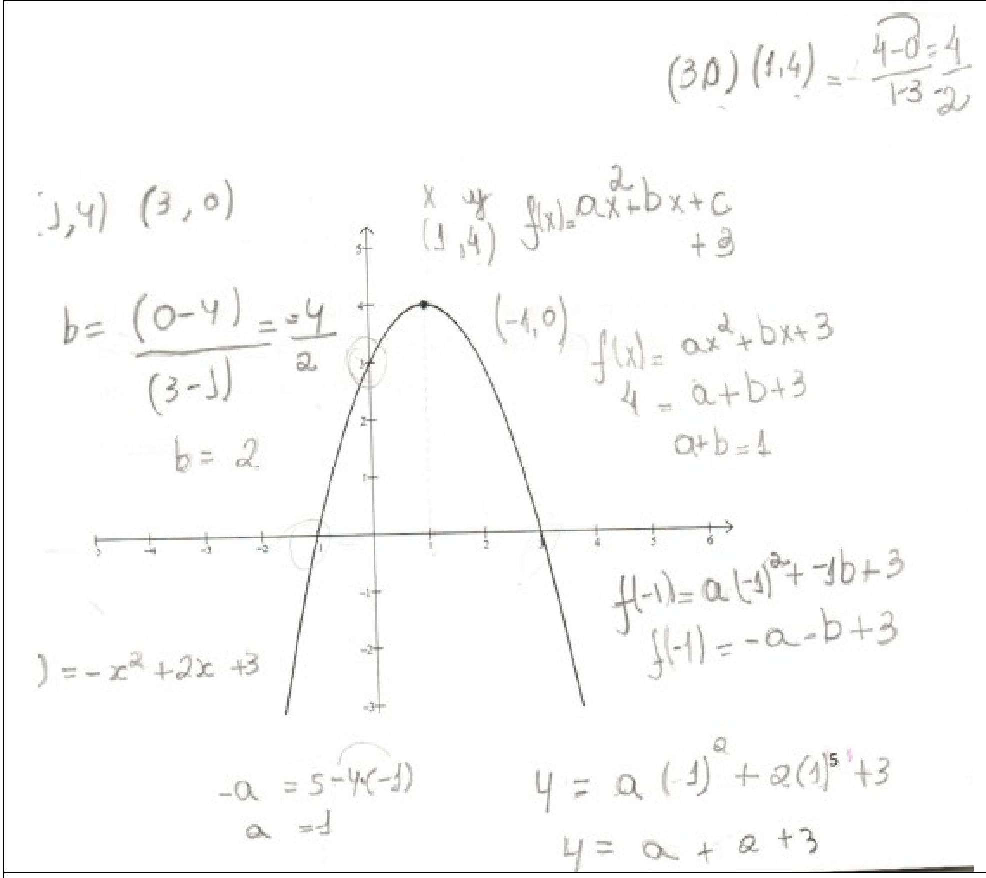
A intervenção da professora, dando a expressão geral de um polinômio de 2º grau, revela que a essência do conceito de função quadrática escapa aos alunos, nesse movimento do geral para o particular e vice-versa.

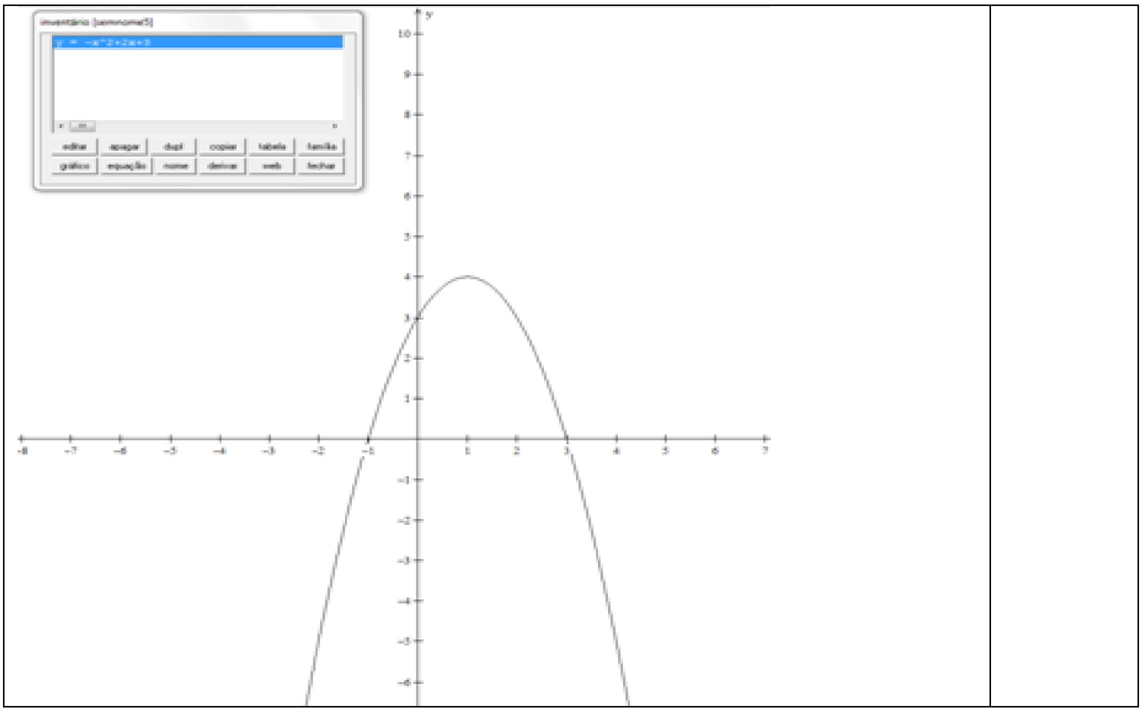
Tarefa8.2: Como você poderia demonstrar ou provar que a lei de formação que você determinou no item anterior está correta? Descreva quais procedimentos ou recursos você utilizou para realizar a verificação.

*Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução.*O aluno poderá analisar as características da função que ele determinou, como: as raízes, o vértice da parábola e o valor de c, ou seja, o ponto que intercepta o eixo y. Pode-se desta forma, comparar os resultados encontrados com os pontos visualizados no gráfico. Outra forma de verificar se a lei de formação encontrada está correta, é construir o gráfico da função. Para construir o gráfico o aluno pode utilizar o *Winplot* ou realizar a construção atribuindo valores para a variável x e desta forma encontrar os valores da variável y. Depois de construído o gráfico, o aluno irá realizar a comparação do gráfico que construiu com o gráfico que a atividade forneceu.

Resposta encontrada pelos alunos na Tarefa 8.2

Resposta	**Sujeitos**
Verifiquei pelo *Winplot*.	Grupo 1
$(-1)\ 1-b=-3$ $-1+b=3$ $y=-ax^2+bx+c$ $b=\frac{3}{-1}$ $3=-a0^2+b0+c \Rightarrow 3$ $b=-3$ $0=a(-1)^2+b(-1)+c$ $a-b+3=0$ $0=a(3)^2+b\cdot 3+c$ $9a+3b+3=c$ $\begin{cases}-a-b=-3\\9a+3b=-3\end{cases}$ $3a-3b=-9$ $9a+3b=-3$ $12a+0=12$ $12a=12$ $a=\frac{12}{12}$ $a=1$ $\begin{array}{c\|c} x & y \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{array}$	Grupo 2
$y=-x^2+2x+3$	Grupo 3
Concavidade para baixo ($-x^2$). O gráfico cruzando o eixo y no 3 (c). O gráfico é decrescente.	Grupo 4

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td>Grupo 5</td></tr>
<tr><td>A partir dos cálculos chegamos na lei de formação da função e foi conferido no Winplot.</td><td>Grupo 6</td></tr>
</table>



Análise a posteriori: Para resolver esta atividade, os grupos 1, 4 e 6 fizeram a conferência de suas respostas, utilizando a construção gráfica com o software *Winplot*. Mas, o Grupo 1não enviou por e-mail a resposta da questão, apenas deixando expresso o uso do *Winplot*. O grupo 2realizou alguns cálculos matemáticos, mas não conseguiu realizar a verificação, e, ainda, temos que considerar que erraram a lei de formação no item anterior. O grupo3colocou somente a lei de formação de forma correta, mas no item anterior não conseguiu determinar esta lei de formação e não deixou claro quais procedimentos foram utilizados. O grupo 5 realizou alguns cálculos, mas não conseguiu demonstrar o processo utilizado. Há indícios de que o aluno não possui um pensamento teórico formado a respeito da função quadrática, pois não utiliza os seus elementos caracterizadores para resolver as tarefas.

Tarefa 8.3: Determine o domínio, a imagem e realize também a análise do crescimento e decrescimento.

*Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução.*O aluno precisa indicar que o domínio da função é composto por todo o conjunto dos números reais. Já a imagem da função é composta por um subconjunto dos números reais, sendo delimitada pelo valor da ordenada do vértice. Em relação ao crescimento e decrescimento da função, o aluno deve perceber que é através do vértice da parábola que ele consegue determinar este intervalo. Considerando que a parábola possui a concavidade voltada para baixo, pois o valor de “a” é negativo e que o vértice da parábola ocorre em x = 1, conclui-se que para valores de x menores do que “um” a função será crescente e para valores de x maiores do que “um” a função será decrescente. O aluno pode confundir o crescimento e decrescimento da função com a análise de sinal da função, ou seja, o intervalo no qual a função assume valores positivos ou negativos. O aluno também pode confundir que a função é sempre decrescente pelo fato do coeficiente a ser negativo, conclusão que deve ser aplicada para funções lineares.

Resposta esperada:

Ainda pelo gráfico, pode-se observar que $D = IR$ e $\mathrm{Im} = \{ y \in IR \mid y \leq 4 \}$.

O vértice da parábola ocorre em $x = 1$. Pelo fato da parábola ter a concavidade voltada para baixo, pode-se observar que:

- $f(x)$ é crescente se $x < 1$;
- $f(x)$ é decrescente se $x > 1$.

Resposta encontrada pelos alunos para a Tarefa 8.3

Resposta	**Sujeitos**
Este gráfico é decrescente	Grupo 1
y<4	Grupo 2
Em branco	Grupo 3
Decrescente.	Grupo 4
Domínio → {IR} Im → {y ∈ R | y ≤ 4} → É crescente até o ponto 4 no eixo y.	Grupo 5
O gráfico cresce do -1 até 1 e cai do 1 em diante.	Grupo 6

Análise a posteriori: As respostas de todos os grupos ficaram incompletas. Mesmo não sendo a primeira tarefa envolvendo análise do crescimento e decrescimento de uma função, os alunos demonstraram dificuldades. Os Grupos 1 e 4 afirmaram que a função é somente decrescente, desconsiderando a parte na qual a função é crescente, provavelmente pelo fato de a parábola estar voltada para baixo. O Grupo 3 deixou a questão em branco. O Grupo 2 somente considerou a imagem menor do que “quatro”. O Grupo 5chegou mais próximo da resposta, acertou o domínio e a imagem da função, mas indicou apenas a ordenada do ponto até onde ocorre crescimento. O Grupo6não determinou a resposta e ainda utilizou uma linguagem inadequada para se expressar "cai do 1 em diante".Os resultados apresentados para essa tarefa mostram que a identificação de componentes importantes do conceito de função quadrática não é feita corretamente, mesmo na presença do gráfico, que permite a visualização.

4.4 Análise da situação-problema9

Objetivo: Explorar o conceito de função quadrática, a partir de sua representação gráfica, buscando verificar em que medida os alunos percebem os elementos caracterizadores dessa função. Ampliar o conceito de função quadrática. Verificar se o uso do *Winplot* contribui para a apropriação dos conteúdos e em que medida.

Tarefa 9.1: Em um mesmo plano cartesiano, represente,utilizando o *Winplot,*as funções:

a) $f_1(x) = x^2$

b) $f_2(x) = (x+2)^2$

c) $f_3(x) = (x-2)^2$

d) $f_4(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

e) $f_5(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

*Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução:*Espera-se que o aluno consiga desenvolver a construção gráfica de uma função quadrática, utilizando *o software Winplot*. Considerando-se que a maioria dos alunos não desenvolvem a representação gráfica, utilizando o recurso computacional, poderão encontrar dificuldade ao digitar no *Winplot* a variável elevada ao quadrado. Alguns alunos ainda podem tentar visualizar o gráfico resolvendo de forma manual, atribuindo valores para a variável x e encontrando assim os valores da variável y, para, posteriormente, tentar visualizar o gráfico no *Winplot*.

Resposta esperada:

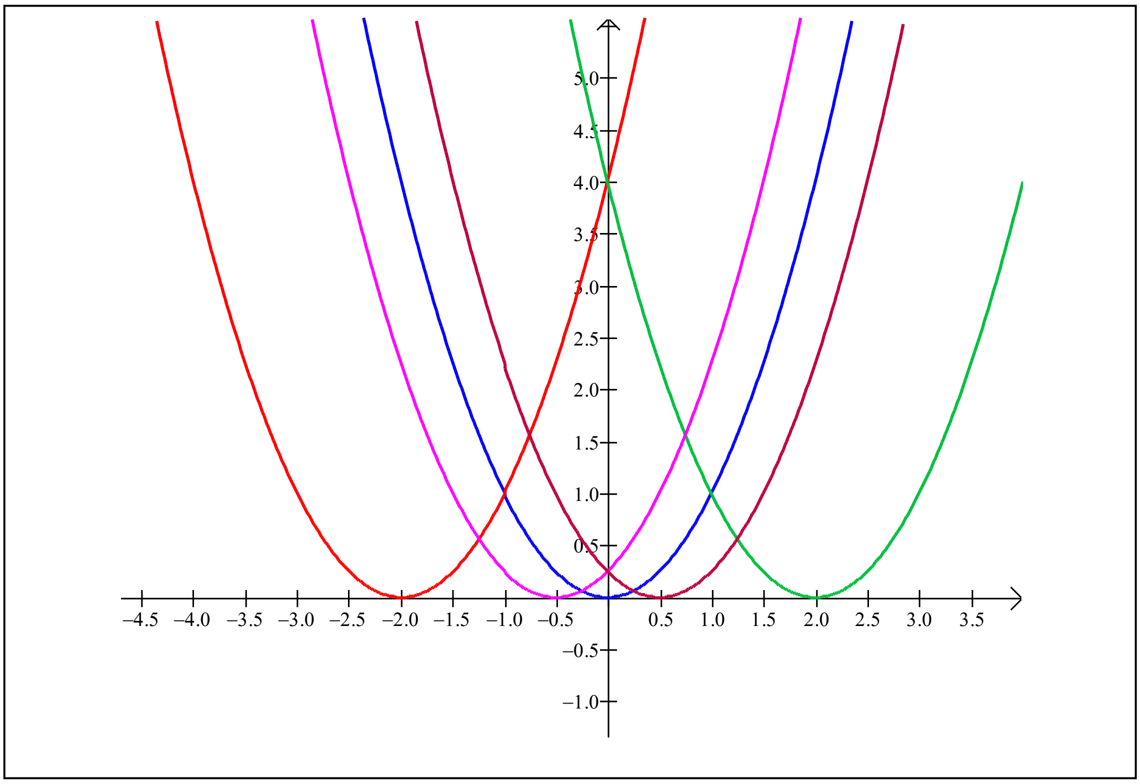
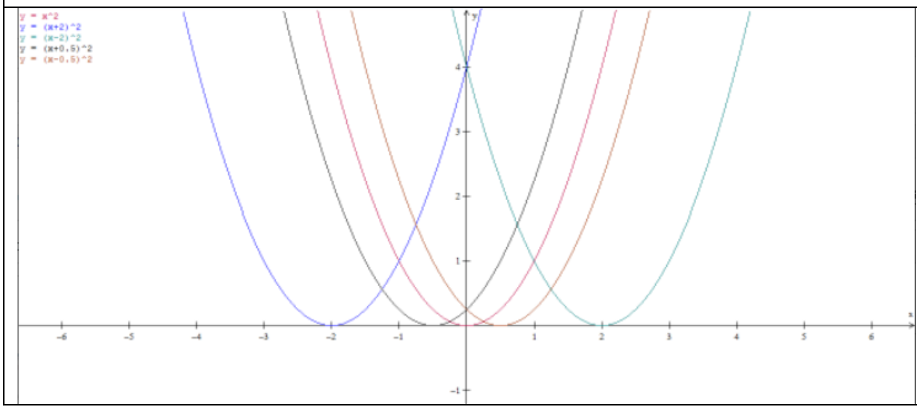
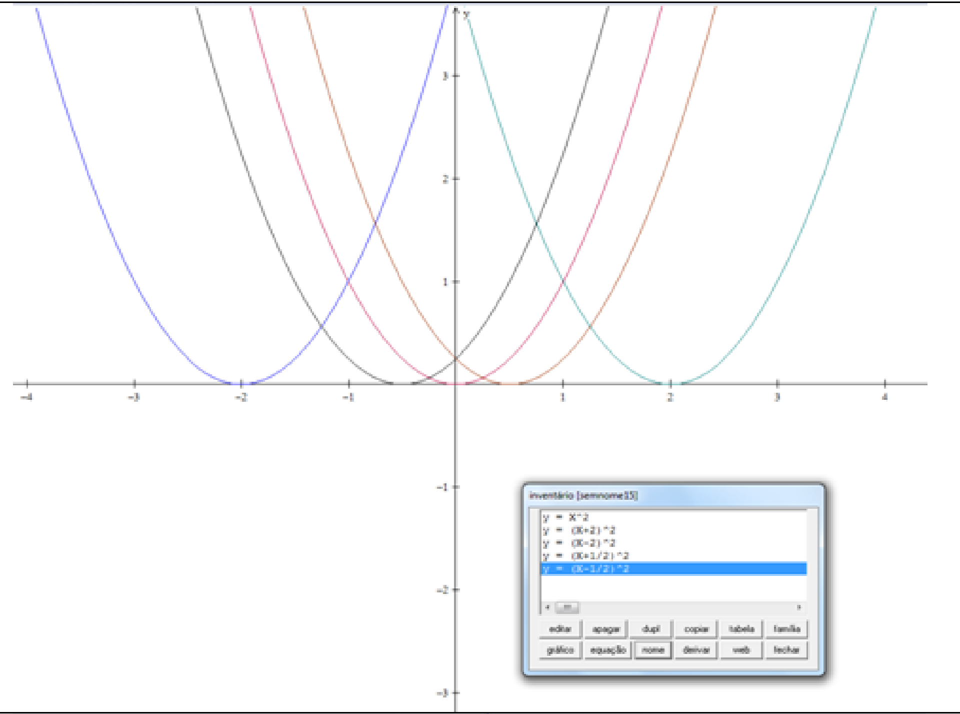
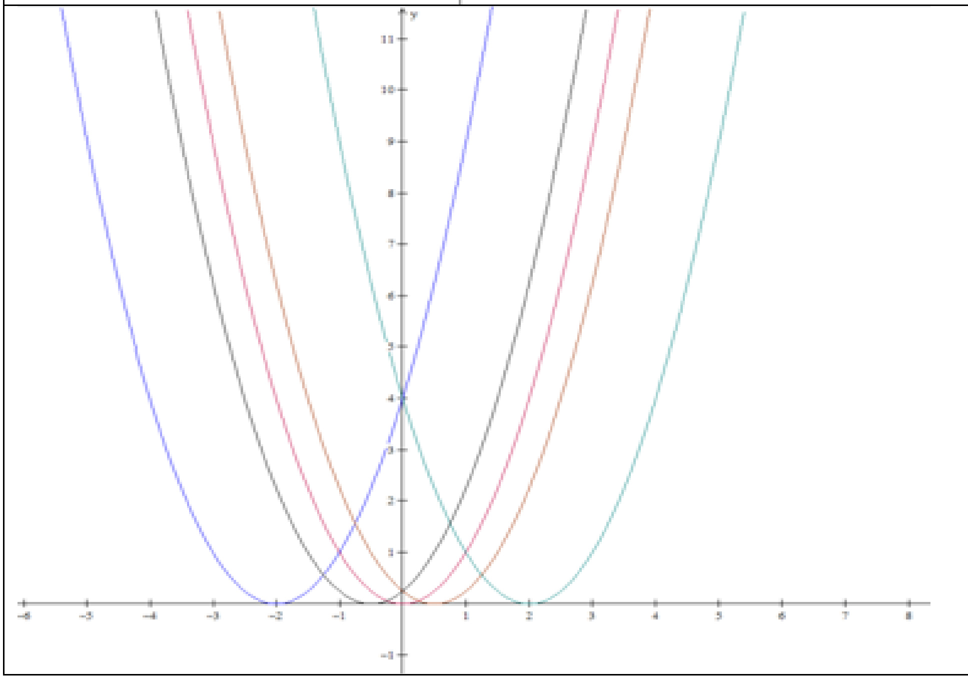
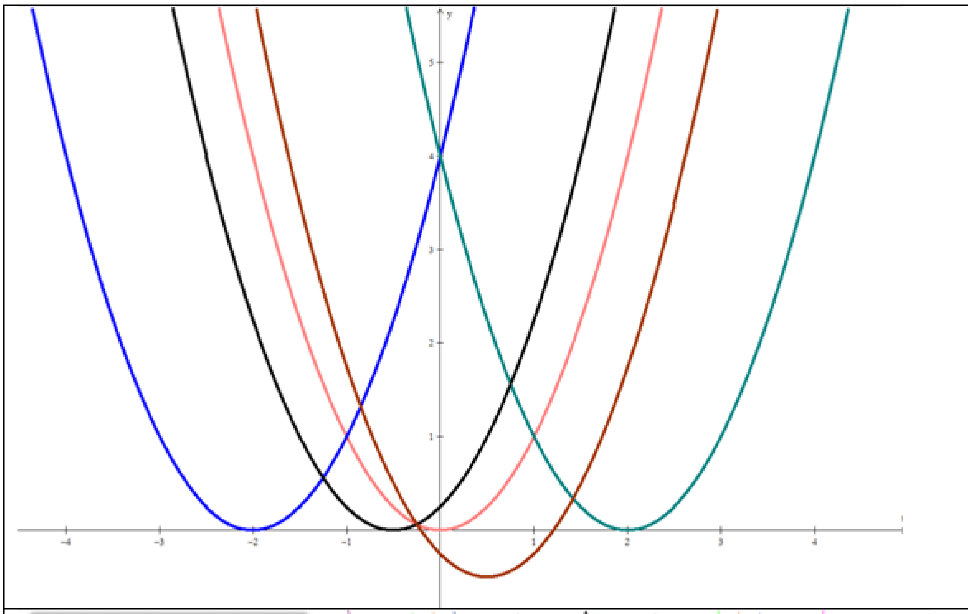
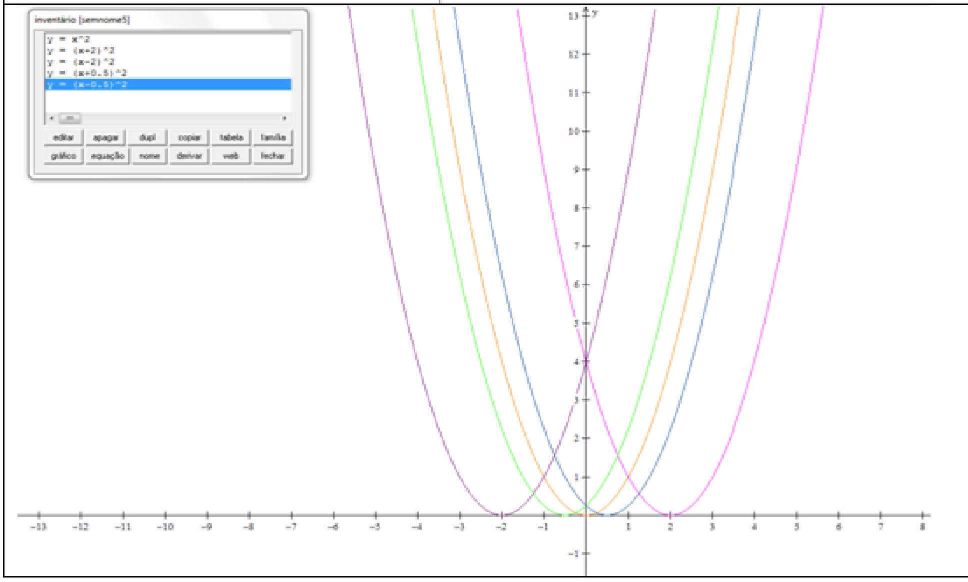


Figura 33: Gráfico do item 9.1

Resposta encontrada pelos alunos para a Tarefa 9.1

<table>
<tr><th>Resposta</th><th>Sujeitos</th></tr>
<tr><td>Em branco</td><td>Grupo 1</td></tr>
<tr><td></td><td>Grupo 2</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Grupo 3</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Grupo 4</td>
</tr>
</table>

	Grupo 5
	Grupo 6

Análise a posteriori: A atividade foi resolvida pelos alunos sem dificuldades, contrariando em parte a análise *a priori* O Grupo1não enviou a resposta pelo e-mail, assim a atividade foi considerada em branco. Os Grupos 2, 3, 4 e 6 conseguiram desenvolver a questão de forma correta. O Grupo5 desenvolveu a construção de quatro gráficos de forma correta. Apenas o gráfico na cor marrom ficou errado, mas infelizmente não descreveram as equações utilizadas.Mais uma vez o *software c*ontribuiu para a obtenção correta do gráfico, porém sem necessidade de pontos notáveis, caracterizadores dessa função.

Tarefa9.2: Compare os gráficos a partir da função inicial $f_1(x) = x^2$, com os demais.O que acontece com o gráfico, conforme somamos ou subtraímos uma constante positiva à base da potência de expoente 2, que é variável independente x?

*Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução.*O aluno deve perceber que,à medida que uma constante é somada à base da potência,envolvendo a variável independente *x*, observa-se um deslocamento horizontal do gráfico para direita por um número de unidades equivalente à constante somada. De maneira análoga, à medida que uma constante é subtraída da base da potência, observa-se um deslocamento horizontal do gráfico para a esquerda por um número de unidades equivalente à constante subtraída. Neste caso, se o aluno realizar a construção gráfica de forma errada, não conseguirá perceber essa relação.

*Resposta esperada:*À medida que uma constante é somada à base da potência que é a variável independente *x*, observa-se um deslocamento horizontal do gráfico para direita por um número de unidades equivalente à constante somada. De maneira análoga, a medida que uma constante é subtraída da base da potência, observa-se um deslocamento horizontal do gráfico para a esquerda por um número de unidades equivalente à constante subtraída.

Resposta encontrada pelos alunos na Tarefa 9.2

Resposta	**Sujeitos**
A função inicial toca no ponto (0,0) e quando somamos 2 o gráfico cresce para a direita e quando subtraímos ele se desloca para a esquerda.	Grupo 1
Quando somado 2 o gráfico vai cortar o eixo y 2 pontos a cima. Quando subtraímos 2 o gráfico vai cortar o eixo y 2 pontos a baixo.	Grupo 2
Observamos que quando somamos uma constante positiva a parábola se desloca para direita e quando subtraímos ela se desloca para esquerda.	Grupo 3
Os pontos vão afastando do ponto zero para lado positivo e negativo.	Grupo 4
O primeiro gráfico fica no meio. E os outros se movem na reta de acordo com o valor.	Grupo 5
Sempre que somamos uma constante positiva sempre ocorrerá um acréscimo no eixo y e quando tem uma constante negativa ocorrerá uma diminuição no eixo y.	Grupo 6

Análise a posteriori: Os grupos 1 e 3 conseguiram observar graficamente e chegarem à conclusão correta para essa situação, ou seja, conseguiram generalizar a partir da análise de algumas funções o que poderá acontecer com qualquer outra, quando somarmos ou subtraímos um número à variável x. Entretanto, não se pode garantir que, sem a visualização da figura, eles chegarão à mesma conclusão. Os grupos 2 e 6 responderam de forma errada, pois se referiram a uma translação no eixo y. O grupo 4 e 5 perceberam o tipo de transformação ocorrida, entretanto usaram uma linguagem pouco adequada do ponto de vista matemático, nesse nível de escolaridade.

Tarefa9.3: Quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada um dos casos? O que significa o vértice de uma parábola?

*Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução:*Para determinar o vértice da parábola de cada uma das funções, o aluno pode simplesmente realizar uma análise a partir dos gráficos construídos no tópico 9.1, ou realizar os cálculo matemáticos: $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. O vértice da parábola indica o ponto de máximo ou mínimo, dependendo do valor do coeficiente "a", que pode assumir valores positivos ou negativos.

Resposta esperada:

a) $f_1(x) = x^2$ Vértice: (0 , 0)

b) $f_2(x) = (x+2)^2$ Vértice: (– 2 , 0)

c) $f_3(x) = (x-2)^2$ Vértice: (2 , 0)

d) $f_4(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ Vértice: (– ½ , 0)

e) $f_5(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ Vértice: (½ , 0)

Resposta encontrada pelos alunos na Tarefa 9.3

Resposta	Sujeitos
$y=x^2 \Rightarrow (0,0)$ $y=(x+2)^2 \Rightarrow (-2,0)$ $y=(x-2)^2 \Rightarrow (2,0)$ $y=(x+\frac{1}{2})^2 = (-\frac{1}{2},0)$ $y=(x-\frac{1}{2})^2 \Rightarrow (\frac{1}{2},0)$ É o ponto que denomina o valor máximo ou mínimo da parabola	Grupo 1
analizando graficamente a) (0,0) b) (-2,0) c) (2,0) d) (-1/5,0) e) (1/5,0)	Grupo 2
Vertices -2 -0,5 0 0,5 2 Vértice de uma parábola é o ponto máximo ou o ponto mínimo da função	Grupo 3
F(1) = 0 F(2) $-\frac{1}{2}$ F(3) $\frac{1}{2}$ F(4) -2 F(5) 2 VERTICE ONDE A PARABOLA ATINGE SEU PUNTU MAXIMO OU PONTO MINIMO.	Grupo 4

$x^2 = (0,0)$ $x^2+4x+4 = (-2,0)$ $x^2-4x+4 = (2,0)$ $x^2+x+\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2},0\right)$ $x^2-x+\frac{1}{4} = \left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$	Grupo 5
Todos tem o 0 com y do vértice.	Grupo 6

Análise a posteriori: Todos os grupos responderam a tarefa, mas não deixaram claro quais os procedimentos matemáticos utilizados para determinar a resposta, mesmo nas gravações em áudio, exceto o grupo 2 que indicou, mas ao que parece pelos registros, analisaram o gráfico.Somente o grupo 1 conseguiu determinar a resposta correta como estava previsto na análise *a priori*. Os grupos 2 e 5 determinaram três respostas corretas (letras: a, b,c) e erraram duas respostas (letras: d, e). Os grupos 3 e 4 não conseguiram determinar a resposta correta, pois não pensaram no vértice como um ponto, indicando apenas a sua abscissa. O grupo 6 identificou corretamente os pontos, mas fez uma indicação indevida, utilizando um sinal de igual que não procede.Sendo o vértice, um dos principais componentes da função quadrática, podemos perceber que os alunos tem um conhecimento difuso a seu respeito. Responderam baseando-se no gráfico. Além disso, chama a atenção o uso da linguagem matemática, que deixa muito a desejar para alunos desse nível de escolaridade.

4.5 Análise da situação-problema 10

Objetivo: permitir a aplicação do estudo da função quadrática a uma situação problema. Ampliar o conceito de função quadrática.Identificar qual a abordagem pedagógica que mais favorece a resolução da situação problema – por meio do *Winplot* ou sem o seu uso.

Situação-problema: Sem utilizar o *Winplot* ou a construção gráfica, você conseguiria descrever a partir da função inicial $f_1(x) = x^2$, como ficaria o gráfico das funções abaixo? Se você não conseguir, descreva quais são os procedimentos que irá utilizar.

a) $f_2(x) = 2(x+3)^2 - 4$

b) $f_3(x) = -3\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}$

c) $f_4(x) = -x^2 + 4x - 3$

d) $f_5(x) = 2x^2 - 2x + 1$

*Análise a priori: estratégia dos alunos prevista para a resolução:*O aluno poderá encontrar muita dificuldade em descrever o gráfico das funções sem realizar sua construção. Provavelmente, optará por realizar a construção gráfica, utilizando o *software Winplot*. Considerando-se que a maioria dos alunos não desenvolvem a representação gráfica utilizando o recurso computacional, o aluno poderá encontrar dificuldade ao digitar no *Winplot* a função elevada ao quadrado. Alguns alunos, ainda podem tentar visualizar o gráfico resolvendo de forma manual, atribuindo valores para a variável x e encontrando os valores da variável y. Outra questão a ser considerada neste tipo de exercício, são as funções $f_2(x)$ e $f_3(x)$, em que o aluno poderá optar por realizar o produto notável, antes de realizar sua representação.

Resposta esperada:

a) Uma parábola com a concavidade voltada para cima, e também com a concavidade mais fechada do que $f_1(x) = x^2$. O gráfico da função $f_2(x)$ tem altura deslocada para baixo em 4 unidades e um deslocamento horizontal em 3 unidades para a esquerda.

b) Uma parábola com a concavidade voltada para baixo, e também com a concavidade mais fechada do que $f_1(x) = x^2$. O gráfico da função $f_3(x)$ tem altura deslocada para cima em 1/3de unidade e um deslocamento horizontal em 5/4 de unidade para a direita.

c) Uma parábola com a concavidade voltada para baixo, possuindo uma concavidade semelhante à de $f_1(x) = x^2$. O gráfico da função $f_4(x)$ tem altura deslocada para cima em uma unidade e um deslocamento horizontal em uma unidade para a direita.

d) Uma parábola com a concavidade voltada para cima, e também com a concavidade mais fechada do que $f_1(x)=x^2$. O gráfico da função $f_4(x)$ tem altura deslocada para cima em 0,5 unidades e um deslocamento horizontal em 0,5 unidades para a direita.

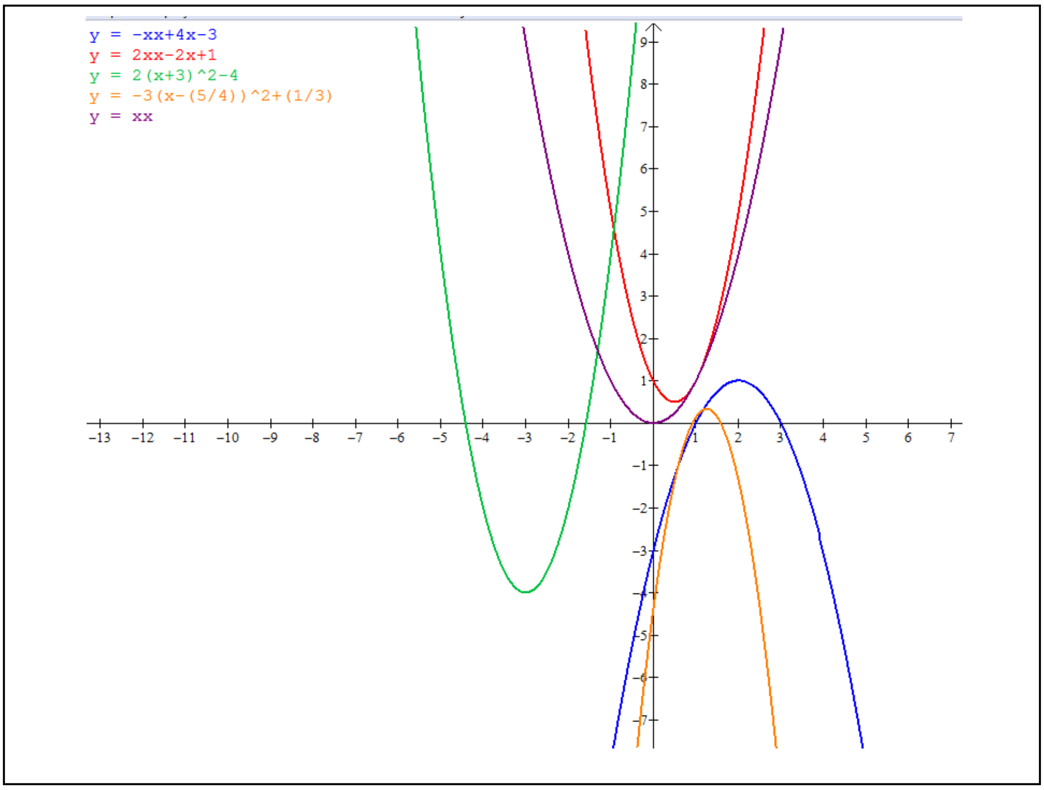
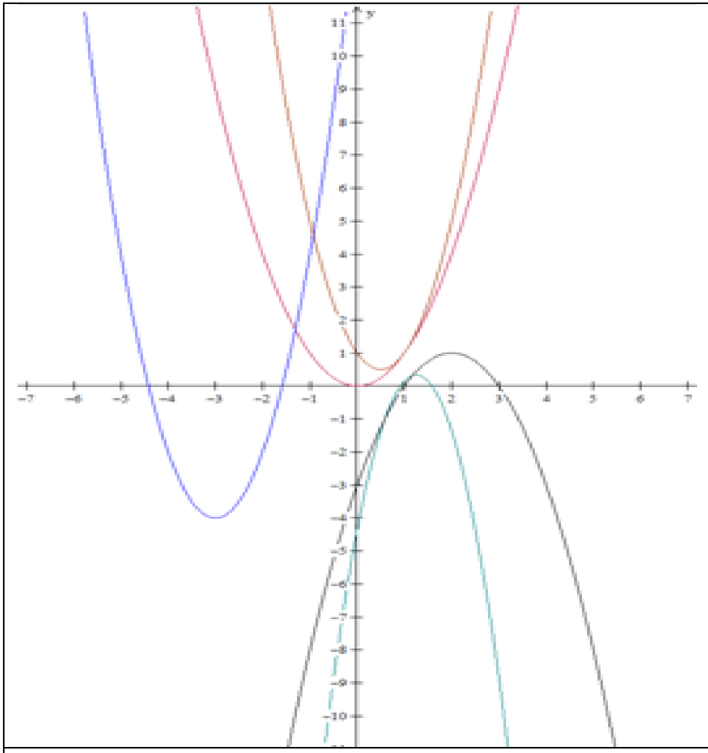


Figura 34: Gráfico da situação-problema 10

Resposta encontrada pelos alunos:

Resposta	**Sujeitos**
Não conseguimos fazer. Mais é só analisar o gráfico se ele é crescente ou decrescente.	Grupo 1
a) $f_2(x)=2(x+3)^2-4$ $=2\cdot(x^2+6x+9)-4=2x^2+12x+18-4=2x^2+12x+12$ parabola crescente cortando o eixo y no +12 b) $-3\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{1}{3}=-3(x-1{,}25)^2+\frac{1}{3}=-3(x^2-2{,}5x+1{,}5625)+\frac{1}{3}$ $-3x^2+7{,}5-4{,}6875+0{,}3333$ parabola decrescente cortando o eixo y no $-4{,}3542$ $-3x^2+7{,}5-4{,}3542$ c) $-x^2+4x-3$ → parabola decrescente cortando o eixo y no -3 d) $2x^2-2x+1$ → parabola crescente cortando o eixo y no 1	Grupo 2
a) $f_2(x)=2(x+3)^2-4$ → o gráfico será uma parabola com a concavidade para cima. b) $f_3(x)=-3\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{1}{3}$ → será uma parabola com a concavidade para baixo c) $f_4(x)=-x^2+4x-3$ → será uma parabola com a concavidade para baixo d) $f_5(x)=2x^2-2x+1$ → será uma parabola com a concavidade para cima	Grupo 3
a) $f_2(x)=2(x+3)^2-4$ O gráfico ficará crescente b) $f_3(x)=-3\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{1}{3}$ O gráfico ficará decrescente c) $f_4(x)=-x^2+4x-3$ O gráfico ficará decrescente d) $f_5(x)=2x^2-2x+1$ O gráfico ficará crescente NÃO CONSEGUIMOS REALIZAR	Grupo 4

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
a) $f_2(x)=2(x+3)^2-4$ $2(x^2+2x3+9)-4 = 2(x^2+6x+9)-4 =$
$2x^2+12x+18-4 = 2x^2+18x+14$

b) $f_3(x)=-3\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{1}{3}$ $-3\left(x^2-2x\left(\frac{-5}{4}\right)+\left(\frac{-5}{4}\right)^2\right)+\frac{1}{3} = -3\left(x^2+\frac{10}{4}x+\frac{25}{16}\right)+\frac{1}{3}$
$-3\left(x^2+\frac{5}{2}+\frac{25}{16}\right)+\frac{1}{3} = -3x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}+\frac{1}{3} = -3x^2+\frac{5x}{2}+\frac{91}{48}$

c) $f_4(x)=-x^2+4x-3$
$-x^2+4x-3$

d) $f_5(x)=2x^2-2x+1$
$2x^2-2x+1$

<u>Resposta:</u>

a) $2x^2+18x+14$
Função crescente
e corta o eixo y no 14.

c) $-x^2+4x-3$
Função decrescente
e toca no -3 no eixo y.

$-3x^2+\frac{5x}{2}+\frac{91}{48}$
função decrescente e
toca aproximadamente
1,87 no eixo y

d) $2x^2-2x+1$
Função crescente e toca
o 1 no eixo y.

Observação: Sei que é decrescente porque o a é negativo
se o a fosse positivo seria crescente.
</td><td>Grupo 5</td></tr>
</table>

a) concavidade voltada para cima pelo fato de A ser positivo e conseguindo achar o ponto mínimo e sabendo que -1 é o ponto que parabola toca primeiro no eixo y b) Terá a concavidade voltada para baixo podendo definir o ponto máximo sendo que $\frac{1}{3}$ é o ponto onde a parabola vai tocar o eixo y c) concavidade voltada para baixo pelo fato de A ser negativo podendo também definir o ponto máximo e sabendo que 3 é o ponto que a parabola vai tocar o eixo y A ser positivo e podendo ser visto o ponto mínimo e pelo fato de C ser 1 pode saber que se nó é o ponto em que a parabola cruzara esse ponto no eixo y	Grupo 6

Análise a posteriori: O grupo 1 não conseguiu realizar a tarefa de identificar as características de uma função quadrática a partir de suas expressões algébricas. Os grupos 2 e 4 não conseguiram responder a atividade, apenas consideraram como crescente e decrescente, mas analisadas de forma incorreta. Os alunos apresentaram muitas dificuldades em identificar que toda função quadrática até um certo ponto ela é crescente e, a partir dele, decresce, ou vice-versa, isto é, tem um intervalo de crescimento e um de decrescimento.

O grupo 3 acertou uma parte prevista na análise *a priori*, identificando que nas letras "a" e "d" a concavidade da parábola está voltada para cima e nas letras "b" e "c" a concavidade da parábola está voltada para baixo. Os alunos identificaram a concavidade da parábola a partir da construção gráfica realizada com o *software Winplot*.

O grupo 5também realizou a análise da mesma forma que os grupos 2 e 4, identificando as funções tão somente como crescente ou decrescente. Mas, deixaram uma anotação na qual podemos perceber o caminho utilizado para responder, eles consideram que se o "a" for positivo a função será crescente e se "a" for negativo será decrescente, o que nos leva a concluir que confundem crescimento/decrescimento com concavidade.

O grupo 6foi o que mais se aproximou da resposta correta, na letra "a" acertaram a resposta, apenas faltou comentar que a parábola se desloca horizontalmente para a esquerda em três unidades, a partir da função $y = x^2$. Na letra "b", faltou comentar que a parábola se desloca horizontalmente para a direta 5/4 de unidade. Na letra "c", colocaram que a parábola atinge o máximo em três unidades no eixo y, mas na realidade desloca para cima em uma unidade e com um deslocamento horizontal em uma unidade para a direita. Na resolução da letra "d", os estudantes erraram a análise feita, pois o gráfico desloca para cima em 0,5 unidades e com um deslocamento horizontal em 0,5 unidades para a direita.

Os resultados dessa atividade indicam que a identificação do comportamento da função quadrática e dos seus elementos essenciais são mais bem percebidos, quando se tem o gráfico, do que quando se tem apenas a expressão algébrica.

Legenda: **X** – CORRETAMENTE, **X** – PARCIALMENTE, **X**– INCORRETAMENTE, **0** EM BRANCO e (1) Não usaram a linguagem matemática adequada

	TAREFA	OBJETIVO PRINCIPAL DA TAREFA	G1	G2	G3	G4	G5	G6
SITUAÇÃO PROBLEMA 6	T.6.1	Representação gráfica de uma função quadrática dada a sua representação algébrica, com o uso Winplot	X	X	X	X	X	X
	T.6.2	Análise do sinal da função	X	X (1)	X (1)	X	X (1)	X (1)
	T.6.3	Análise da função, o zero da função	X	X	X	X	X	X
	T.6.4	Análise do crescimento da função	X	X	X (1)	X	X (1)	X (1)
SITUAÇÃO PROBLEMA 7	T.7.1	Análise das funções: afim e quadrática	X	X	X	X	X	X
	T.7.2	Representação gráfica: afim e quadrática	X	X	X	X	X	X
	T.7.3	Representação gráfica com o uso do Winplot	0	0	X	X	X	X
	T.7.4	Comparação entre a construção do gráfico, com e sem o Winplot	X	0	X	X	X	X
SITUAÇÃO PROBLEMA 8	T.8.1	Obtenção a expressão algébrica que define a função quadrática a partir do gráfico	X	X	X	X	X (1)	X (1)
	T.8.2	Verificação da lei obtida	X	X	X	X	X	X
	T.8.3	Determinação do domínio, imagem e análise da função	X	X	0	X	X	X
SITUAÇÃO PROBLEMA 9	T.9.1	Representação gráfica com o uso do Winplot, dadas as expressões algébricas numa forma implícita.	0	X	X	X	X	X
	T.9.2	Análise das funções a partir de seus gráficos	X	X	X	X	X	X
	T.9.3	Determinação do vértice	X	X	X (1)	X (1)	X (1)	X
SITUAÇÃO PROBLEMA 10	T.10.1	Análise da função sem a representação gráfica.	X	X	X	X	X	X

Quadro 3:Síntese das análises em relação ao objetivo da função quadrática

A partir da análise de cada uma das situações-problema e de suas respectivas tarefas, envolvendo a função quadrática, e, considerando os limites que a experimentação possa ter – alunos advindos de escola pública, trabalhadores, e limites impostas pelas tarefas e por suas condições de aplicação, pudemos constatar que a apropriação desse conceito não atinge o nível do pensamento teórico. Observando a forma como os participantes lidaram com os elementos caracterizadores e as representações desse conceito, podemos perceber que não há e nexos entre esses elementos. São *amontoados sincréticos*, que, segundo Vygotsky (2001) , constituem um agrupamento ou reunião de um conjunto de objetos de forma desorganizada. Demonstram, por exemplo, ter conhecimento de um elemento importante, que se chama *vértice,* mas não o associam com o comportamento da função, além de confundir intervalos de crescimento e decrescimento com intervalos em que a função assume valores positivos e negativos. Nem mesmo a visualização através do gráfico permitiu dar respostas adequadas, além do que as diferentes representações não conversam entre si, isto é, não há um uso consciente de diferentes sistemas semióticos, como deveria ser próprio do conhecimento teórico.

A seguir apresentamos as considerações finais acerca de todo o processo de construção desta pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho buscou analisar como o aluno de cursos de engenharia, que já estudou as funções afim e quadrática, apropriou-se desses conceitos, no movimento do geral/essencial para o particular e desse para o geral. Com base nos referenciais da Teoria Histórico-Cultural, especialmente em Vygotsky e Davydov, entendemos a apropriação de um conceito no nível de ensino no qual esse trabalho foi desenvolvido, no nível superior, como uma etapa da formação do pensamento teórico que ocorre por abstrações e generalizações, representando a relação entre as propriedades do objeto e as suas ligações internas, estabelecendo a relação dialética entre o geral e o particular, utilizando diferentes sistemas semióticos.

O conceito de função é um conceito essencial para a leitura e interpretação dos fenômenos naturais como aborda Caraça (1951), capaz de expressar a interdependência e a fluência, características marcantes da r*ealidade* na qual a humanidade se insere. Por essa razão é o conceito básico para a disciplina Cálculo Diferencial e Integral e a disciplinas de áreas correlatas, presentes em vários cursos de ensino superior, dentre eles os de engenharias, foco de nosso estudo. Entretanto essas disciplinas têm se constituído em obstáculos para os alunos, como o tem mostrado muitos trabalhos já realizados. Tomamos como objeto de estudo a apropriação dos conceitos de função afim e de função quadrática que são tratados desde a educação básica.

É um estudo de abordagem qualitativa, que servirá de referência para outros trabalhos que estão sendo realizados no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação da UNIUBE. Para sua realização, utilizamos os procedimentos metodológicos da engenharia didática como ferramenta, pois nos permitem observar e explorar os objetos matemáticos e a sua relação entre a teoria e o território experimental da prática educativa. Foi realizado com um grupo de 12 alunos, divididos em duplas, escolhidos aleatoriamente, de uma turma de estudantes de engenharia, que já haviam cursado uma disciplina em que esses conceitos foram abordados, numa instituição de ensino superior privada da região do Triângulo Mineiro – MG.

Buscamos através dos procedimentos da engenharia didática realizar uma análise a priori e a posteriori de 10 situações-problema, cinco envolvendo a função afim e cinco, a função quadrática. As atividades foram realizadas no laboratório de informática, pois se fez uso do *software Winplot.* De forma geral, buscamos analisar nas situações -problemas o conceito de função, generalização da lei de formação, o papel dos parâmetros da função afim e quadrática, crescimento e decrescimento e aplicações das funções.

Quanto ao objetivo geral da pesquisa: *analisar como o aluno de cursos de engenharias que já estudou as funções afim e quadrática se apropriou dos seus conceitos, no movimento do geral/essencial para o particular e desse para o geral,* foi possível constatar a partir dos dados empíricos e do referencial teórico adotado que:

- em relação ao conceito de função afim, há indícios de que os participantes apresentam *um pensamento por complexos* ou *pseudo-conceito,* porque os elementos constituintes do conceito, inclusive as suas representações, parecem não atingir um nível de "relação geral" e uma "abstração substantiva" do assunto estudado, como nos fala Davydov (1988), ao abordar o currículo escolar**.** Parecer não haver consciência daquilo que é geral;
- em relação ao conceito de função quadrática, há indícios de que não há nexos que unam os elementos caracterizadores do conceito, o que permite afirmar que não se trata de um conceito propriamente dito, mas de *amontoados sincréticos*, que, segundo Vygostsky (2001) , constituem um agrupamento ou reunião de um conjunto de objetos de forma desorganizada.

Assim, se a formação do conceito é caracterizada pela abstração e pela generalização, não sendo suficiente a identificação de elementos desconexos ou simplesmente a identificação daquilo que é comum a uma dada classe; se é essencial que haja o movimento da análise para a síntese e da síntese para a análise, ir do geral para o particular e do particular para o geral, de modo geral, podemos inferir que esses alunos não atingiram a formação do pensamento teórico em relação aos conceitos de função afim e quadrática, objeto deste estudo.

No que se refere ao objetivo de verificar como os alunos de cursos de engenharia trabalham com as representações algébrica e geométrica, pudemos constatar que apresentam dificuldades no trato algébrico dos elementos caracterizadores dos conceitos envolvidos, principalmente no caso da função quadrática. A representação geométrica facilita a análise de situações mais simples, mas não se pode afirmar que ela permita/favoreça a abstração e a generalização. No caso da função quadrática, as diferentes representações não conversam entre si, isto é, não há um uso consciente de diferentes sistemas semióticos, como ocorre no conhecimento teórico.

Inferir como o uso de recursos computacionais, como o *software Winplot*, contribui ou não para a identificação dos elementos caracterizadores dos conceitos de função afim e função quadrática era outro objetivo específico deste trabalho. O que pudemos constatar é que a utilização do *software Winplot* facilitou muito a realização das tarefas durante a aplicação da pesquisa. Os alunos não apresentaram dificuldades em operar os comandos que o *software* exige. Mas, por outro lado, essa facilidade parece "obscurecer" a formação do conceito, pois dispensa o conhecimento dos elementos e das relações que o compõem. A utilização do *software* conduz a uma prevalência da representação geométrica sobre a algébrica.

De forma geral, os alunos pesquisados não utilizam da maneira correta a representação algébrica de uma função, a simbologia $y = f(x)$ é irrelevante para muitos, enquanto que outros consideram que o uso da linguagem adequada não é importante. Dessa forma observamos que o conceito de função não foi formado, pois conseguem realizar relações entre as variáveis em casos particulares, mas enfrentam dificuldades em trabalhar com o que é geral nesses conceitos.

Durante a aplicação da sequência didática, observamos que os alunos não se preocupam em utilizar a linguagem formal da matemática, como por exemplo, a escrita da variável dependente e independente, e que eles somente conseguem realizar essa associação se considerarem "x" como variável independente e "y" como variável dependente, ou seja, se, por exemplo, utilizarmos a notação $x = f(y)$, eles não conseguem compreender e identificar qual é a variável independente e qual é a dependente.

Foram muitas as dificuldades enfrentadas durante a realização desta pesquisa. A maior delas foi definir o campo de pesquisa, pois iniciamos nossos experimentos com os alunos dos cursos de engenharia na modalidade de Educação a Distância. Assim, depois de todo o empenho para a construção da sequência didática e de todo um planejamento que esta modalidade exige, não obtivemos dados suficientes para realizarmos a análise. Assim sendo, optamos por redefinir os participantes e até mesmo os objetivos do trabalho. Isso exigiu a adaptação da sequência didática, pois o foco anterior da pesquisa era a utilização das mídias digitais, e na modalidade presencial esse enfoque não é comumente trabalhado pelo professor. Geralmente cada turma presencial é composta de sessenta alunos, e como já relatamos, os laboratórios da instituição pesquisada comportam somente trinta alunos. Isso impossibilita o professor de trabalhar com os alunos outros recursos que utilizam a informática, como por exemplo, os *softwares* matemáticos.

Outro fator que dificultou o nosso trabalho foi o grande número de situações-problema trabalhadas. No início os alunos demonstraram um bom desempenho na realização das tarefas, apesar das dificuldades enfrentadas, principalmente em relação a elementos que envolvem a matemática básica, como: resolução de equação de 1º grau, potenciação e regra de sinais. Mas, no decorrer das tarefas, o desânimo foi tomando conta dos alunos. Isso comprova que a sequência didática composta de dez situações-problemas era extensa o que ocasionou o cansaço dos participantes.

Umas das principais dificuldades ainda não superadas no ensino de funções para os cursos de engenharia diz respeito aos projetos pedagógicos existentes no ensino superior. De um modo geral, a estrutura curricular desses cursos aborda o ensino de matemática em nível superior nos períodos iniciais do curso. O cenário atual mostra que os estudantes ingressam na graduação sem a devida apropriação de outros conceitos elementares.

Mesmo que o professor adote uma estratégia pedagógica de forma a abordar os conteúdos básicos, haverá problemas no cumprimento dos conteúdos estabelecidos na ementa da disciplina. Esses conteúdos requerem um tempo razoável para serem efetivamente trabalhados com esses alunos. Dessa maneira os conteúdos originalmente pensados deixam de ser abordados na sua totalidade. Considerando a existência de disciplinas específicas que requerem conceitos do Cálculo nos primeiros períodos de engenharia, essa abordagem pode comprometer o processo ensino-aprendizagem no curso.

Uma maneira alternativa de resolução desse problema tem sido a criação de uma disciplina de matemática básica antecedente ao Cálculo. Contudo isso torna a abordagem do Cálculo tardia, haja vista a necessidade de seus conceitos em outras disciplinas como por exemplo, física.

Além disso, o que este estudo revela é que a abordagem de determinados conceitos várias vezes, em disciplinas cujo objetivo é a revisão de conteúdos anteriores não apropriados pelos alunos, pode não ter eficácia alguma se se repetir uma organização didática do ensino que não privilegia a formação do pensamentos científico dos alunos. Os conceitos abordados neste estudo fazem parte do currículo de matemática do ensino médio e até mesmo do 9º ano do Ensino Fundamental e os alunos pesquisados já haviam passado na universidade por uma disciplina em que os esses conceitos foram retomados. Entretanto demonstraram uma aprendizagem deficiente desses conceitos. Sabemos que não é tarefa fácil organizar o ensino na perspectiva que é apresentada pelos teóricos da abordagem histórico-cultural, pois estamos acostumados a um ensino que privilegia o pensamento empírico, além de outros problemas que afetam as nossas escolas de educação básica. Mas há que tentar, pois essa perspectiva teórica aponta possibilidade e é isso que outros estudos estão buscando.

Enquanto pesquisadora reconhecemos que amadurecemos muito com a realização dessa pesquisa. Quando estou ministrando aulas de Cálculo, penso muito nos resultados dessa pesquisa, pois o professor tem um papel fundamental na vida acadêmica de um aluno.

A contribuição dessa investigação para a discussão sobre o processo de ensino-aprendizagem foi a de mostrar que a apropriação de conceitos, como o de função, não ocorre simplesmente com a apresentação de situações-problema na etapa introdutória de seu ensino. A análise da sequência didática mostrou que há uma deficiência desses conceitos por parte dos alunos, pois as situações-problemas e os recursos tecnológicos por si mesmos não levam à formação desse conceito por parte dos educandos. É necessário buscar a sua essência, ou seja, trabalhar com os alunos de modo a desenvolver o pensamento teórico, permitindo a aprendizagem e o desenvolvimento das capacidades psíquicas superiores num movimento dialético.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Editora UFPR, 2007.

ALVES, Davis Oliveira. Ensino de Funções, Limites e Continuidade em Ambientes Educacionais Informatizados: Uma proposta para cursos de Introdução ao Cálculo. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto. Disponível em <http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/Diss_Davis_Alves.PDF>. Acesso em: 20 abr. 2014.

ANDERY, Maria Amélia et al. **Para compreender a ciência**: uma perspectiva histórica. 4 ed. Rio de Janeiro: Espaço e Tempo, 1992.

ARTIGUE, Michèle. Didactical design in mathematics education. In: C. Winsløw (ed.) Nordic Research in Mathematics Education. PROCEEDINGS OF NORMA08. SensePubl., 2009, 10p.

BERTONI, Neuza Pinto. Práticas escolares do movimento da matemática moderna**.** Anais do IV COLUBHE. Uberlândia. 2006.Disponível em: http://www2.faced.ufu.br/colubhe06/anais/arquivos/364NeuzaPinto.pdf. Acesso em: 20 jun. 2014.

BOTELHO, Leila e REZENDE Wanderley. Um breve histórico do conceito de função. **Caderno dá licença**. Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense v.6. Niterói, 2005. Disponível em: < http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/vo

lume6/UM_BREVE_HISTRICO_DO_CONCEITO_DE_FUNO.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2014.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa: Tipografia Matemática, 1984.

CAVASOTTO, Marcelo. **Dificuldades na aprendizagem de cálculo: O que os erros cometidos pelos alunos podem informar**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010. Disponível em: <http://tede.pucrs.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=3087>. Acesso em: 20 abr. 2014.

CHIZZOTTI, Antonio. **Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais.** São Paulo: Editora Cortez, 2008.

DAVYDOV, Vasili V. Problemas do ensino desenvolvimental: a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. **Tradução de textos publicados na Revista SovietEducation sob o título Problemsofdesenvolvimentalteaching (tradução para o português não publicada). Educação Soviética. Moscou: Editorial Progresso**, 1988.

DAVYDOV, VasilijVasilievic. O problema da generalização e do conceito na teoria de vygotsky. In: **Texto de conferência proferida na reunião do Comitê Internacional da InternationalSociety for Cultural ResearchandActivityTheory. Departamento de**

Ciências Psiquiátricas e Medicina Psicológica da Universidade de Roma. 1992.

FACCINA, Carlos. Apagão de talentos: a falta de engenheiros. **Revista Época**. 09 set. 2011. Disponível em: <http://colunas.revistaepocanegocios.globo.com/prazodevalidade/2011/09/09/apagao-de-talentos-a-falta-de-engenheiros/ >. Acessoem:20 abr. 2014.

FERRUZZI, Elaine Cristina; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. Modelagem Matemática no ensino de Matemática para engenharia. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 6, n. 1, 2013.

FLICK, Uwe. **Uma introdução à pesquisa qualitativa**. Porto Alegre: Bookman, 2004.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo: Editora Atual, 2007.

KAMPFF, Adriana Justin Cerveira; MACHADO, José Carlos; CAVEDINI, Patrícia. **Novas Tecnologias e Educação Matemática**. Artigo apresentado no X Workshop de Informática na Escola, junto ao XXIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, Bahia, 2004.

LACHINI, Jonas. Subsídios para explicar o fracasso de alunos em Cálculo. In: LACHINI, Jonas e LAUDARES João Bosco. Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p.146-188.

LEONTIEV, Aléxis N. Uma contribuição à teoria de desenvolvimento da psique infantil. In: VIGOTSKI, Lev Semenovich; LURIA, Alexander Romanovich; LEONTIEV, Aléxis. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Ícone, 2001, p. 59-83.

LIBÂNEO, José Carlos. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a Teoria Histórico-cultural da Atividade ea contribuição de VasiliDavydov. **Revista Brasileira de Educação**, n. 27, set/out/nov/dez. 2004.

LIBÂNEO, José Carlos; FREITAS, Raquel A.M. M.Vygotsky, Leontiev, Davydov: três aportes teóricos para a Teoria Histórico-Cultural e suas contribuições para a Didática.**CONGRESSO BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO**, n. 4, 2006, Goiânia. Anais... Goiânia, 2006. Disponível em: <http://www.sbhe.org.br/novo/congressos/cbhe4/individuaiscoautorais/eixo03/Jose%20Carlos%20Libaneo%20e%20Raquel%20A.%20M.%20da%20M.%20Freitas%20%20Texto.pdf>. Acesso em: 20 abr. 2014.

MORAIS, Ana Cristina Franco Rocha; LAUDARES, João Bosco. Tendências progressistas para o processo ensino/aprendizagem de Matemática nos cursos de Tecnologia. **Educação e Tecnologia**, v. 7, n. 2, Cefet - MG, 2002. Disponível em: <http://seer.dppg.cefetmg.br/index.php/revista-et/article/view/39>. Acesso em: 20 abr. 2014.

MORETTI, Vanessa Dias; ASBAHR, Flávia da Silva Ferreira; RIGON, Algacir José. O humano no homem: os pressupostos teórico-metodológicos da teoria histórico-cultural. **Psicologia & Sociedade**, v. 23, n. 3, set/dez. 2011.

OLIVEIRA, Martha Kohl. **Vygotsky**: aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico. 4 ed. São Paulo: Scipione, 2010.

PALANGANA, IsildaCampaner; GALUCH, Maria Teresinha Bellanda; SFORNI, Marta Sueli de Faria. Acerca da relação entre ensino, aprendizagem e desenvolvimento. Revista Portuguesa de Educação. Ano/vol.15, n. 001. Braga, Portugal. Universidade do Minho, 2002. Pp 111-128.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PAULOVICH, Leonardo. Um estudo sobre formação de conceitos algébricos.**Ciência&Educação**, Bauru, v. 5, n. 2, p. 39-48, 1998.

PEREIRA, Juliana Corrêa; SILVA, Ludmilla Rangel Cardoso; AZEVEDO, Carmem Lúcia Vieira Rodrigues; BATISTA, Silvia Cristina Freitas. **(Re) Construção de saberes matemáticos: uma proposta de curso de pré-cálculo no moodle.** 2013. Disponível em <www.essentiaeditora.iff.edu.br/index.php/encontrode**matematica**/.../2970>. Acesso em: 20 abr. 2014.

ROCHA, Marcos Dias da.**Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina de cálculo diferencial e integral I: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto. Disponível em <http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/Diss_Marcos_Dias_Rocha.PDF >. Acesso em: 20 abr. 2014.

ROSA, Josélia Eusébio; MORAES, Silvia Pereira Gonzaga; CEDRO, Wellington Lima. As Particularidades do Pensamento empírico e do Pensamento teórico na Organização do Ensino. In: MOURA, Manoel Oriosvaldo. **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber livro, 2010, p. 67.

ROSSINI, Renata. Evolução das organizações matemáticas e didáticas construídas em torno do conceito de função em uma formação de professores. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, 2007, v. 9, n. 2, pp. 205-247.

SAVIANI, Dermeval. **Pedagogia histórico crítica**: primeiras aproximações. 7 ed. Campinas: Autores Associados, 2000.

VAN DEER VER, Rene; VALSINER, Jaan.**Vygotsky**: uma síntese. 4 ed. São Paulo: Loyola, 2001.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **Pensamento e Linguagem**. Tradução de Jeferson Luiz Camargo. 3 ed. São Paulo: Livraria Martins Fontes, 1993.
VIGOTSKY, Lev Semenovich. Obras escogidas, tomo III. **Problemas en el desarrollo de la psique. Ed. Visor distribuciones SA Madrid.** 2000.