

ASSOCIAÇÃO MECÂNICA DO OSCILADOR HARMÔNICO ISOTRÓPICO COM AS ÓRBITAS ELÍPTICAS DOS ASTROS E CURVAS DE LISSAJOUS

Arnaldo Barbosa de Oliveira
arnaldoobarbosa@yahoo.com.br

Wellington Mrad Joaquim
wellington.joaquim@uniube.br

RESUMO

Movido por uma tentativa de interligar dois fenômenos que a priori parecem estar interligados entre si, este artigo almeja, através de uma consulta a diversas obras relacionadas com o tema e de uma vasta pesquisa exploratória e bibliográfica, associando conceitos de Mecânica Celeste e Oscilações, analisar, explicar e fazer, na medida do possível, uma equivalência entre dois tipos de movimentos bidimensionais muito semelhantes em suas representações física e matemática: o que descreve as órbitas elípticas dos corpos celestes e o que caracteriza o oscilador harmônico isotrópico ou radial (uma sobreposição, em duas dimensões, de dois movimentos harmônicos simples em direções perpendiculares). Para conseguir tal intento, o autor parte do pressuposto estabelecido pelo Teorema de Bertrand, que rege a produção, em suas regiões de atuação, de trajetórias estáveis, fechadas e limitadas (como círculos e elipses) pelos campos potenciais escalares dos dois tipos de força central que estão por detrás desses fenômenos: uma atrativa que obedece à lei do inverso do quadrado e outra oriunda de um oscilador harmônico radial. Finalmente, para permitir uma identificação visual da associação investigada neste trabalho, as oscilações e as órbitas dos astros serão relacionadas geometricamente com as curvas ou figuras de Lissajous, reforçando ainda mais essa hipótese.

Palavras-chave: Curvas de Lissajous. Gravitação. Mecânica Celeste. Movimento Orbital. Oscilador Harmônico Isotrópico.

1 INTRODUÇÃO

À medida que o conhecimento físico do Universo se expande em quantidade e qualidade, torna-se cada vez mais perceptível que os campos de estudo desta

ciência estão completamente interligados entre si e com outras áreas do saber humano. Isso é reforçado por FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. (1963, v. I, cap. 21) na seguinte citação:

“No estudo da física, habitualmente o curso é dividido em uma série de matérias, tais como mecânica, eletricidade, óptica etc., e alguém estuda uma matéria após a outra. [...] Mas uma coisa estranha ocorre repetidas vezes: as equações que aparecem em diferentes campos da física, e até em outras ciências, são, com frequência, quase exatamente as mesmas, de modo que muitos fenômenos têm análogos nesses distintos domínios. [...] Portanto, o estudo de um fenômeno em um campo pode permitir uma extensão de nosso conhecimento em outro campo. [...] O oscilador, que estamos prestes a estudar, possui analogia próxima com muitos outros domínios; embora comecemos com um exemplo mecânico de um peso em uma mola, ou de um pêndulo com uma pequena oscilação, ou ainda de certos outros dispositivos mecânicos, estamos, na verdade, estudando certa *equação diferencial*. Esta equação aparece repetidamente na física e em outras ciências e, de fato, é uma parte de inúmeros fenômenos que seu estudo cuidadoso vale a pena o nosso tempo.” (FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M., 1963, v. I, cap. 21 – O Oscilador Harmônico, tradução nossa)¹.

Como bem observado por diferentes autores, incluindo os já citados, o Oscilador Harmônico está no âmago do entendimento de vários âmbitos da Física, desde a Clássica até a Moderna. Porém, neste trabalho, com a mesma intenção de conectar temas diferenciados, visando uma compreensão geral e específica maior dos fenômenos analisados, o autor focou sua atenção para uma importante aplicação deste tema ao estudo da Mecânica Celeste, em especial ao movimento orbital dos astros (mais especificamente, ao caso elíptico, conforme descrito pelas Leis de Kepler e pela Lei da Gravitação Universal), propondo, como hipótese, a sua análise, descrição e equivalência matemática como uma superposição de dois movimentos harmônicos simples em direções perpendiculares.

Os estudos de Sir Isaac Newton (1643 – 1727), contidos em sua obra-prima *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687), estendidos por Joseph Louis

¹ “In the study of physics, usually the course is divided into a series of subjects, such as mechanics, electricity, optics, etc., and one studies one subject after the other. [...] But a strange thing occurs again and again: the equations which appear in different fields of physics, and even in other sciences, are often almost exactly the same, so that many phenomena have analogs in these different fields. [...] So the study of a phenomenon in one field may permit an extension of our knowledge in another field. [...] The harmonic oscillator, which we are about to study, has close analogy in many other fields; although, we start with a mechanical example of a weight on a spring, or a pendulum with a small swing, or certain other mechanical devices, we are really studying a certain *differential equation*. This equation appears again and again in physics and in other sciences, and in fact it is a part of so many phenomena that its close study is well worth our while.” (FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M., 1963, Volume I, Chapter 21 – The Harmonic Oscillator).

François Bertrand (1822 – 1900) em seu teorema (Teorema de Bertrand), mostram que apenas dois tipos de campos potenciais escalares, produzidos por uma força central (radial), permitem a descrição de órbitas limitadas, fechadas e estáveis em suas regiões de atuação: o potencial de uma força central atrativa que obedece à lei do inverso do quadrado (LIQ) – que é o caso dos potenciais elétrico e gravitacional, por exemplo – (1) e o potencial de um oscilador harmônico radial (OHR), também conhecido como oscilador harmônico isotrópico (2).

$$U'(r) = -\frac{k'}{r} \text{ com força } \vec{F}_{LIQ}(r) = -\vec{\nabla}U'(r) = -\frac{dU'(r)}{dr}\hat{r} \Rightarrow \vec{F}_{LIQ}(r) = -\frac{k'}{r^2}\hat{r} \quad (1)$$

$$U(r) = \frac{1}{2}kr^2 \text{ com força } \vec{F}_{OHR}(r) = -\vec{\nabla}U(r) = -\frac{dU(r)}{dr}\hat{r} \Rightarrow \vec{F}_{OHR}(r) = -kr\hat{r} \quad (2)$$

SANTOS, F. C.; SOARES, V.; TORT, A. C. (2018, p. 1-2) apresentam essa elucidação e mencionam um fato curioso decorrente dela.

“Em 1873, Joseph Louis François Bertrand (1822 – 1900) publicou um curto, porém importante, artigo, no qual provou que existem dois campos centrais apenas para os quais todas as órbitas limitadas são fechadas, a saber, a lei do oscilador harmônico isotrópico e a lei da gravitação universal de Newton, que Bertrand chama de ‘la loi de la nature’ (a lei da natureza). Por causa dessa simetria adicional, não é de se admirar que as propriedades mais essenciais desses dois campos foram estudadas pelo próprio Newton, que as discute na Proposição X e na Proposição XI do Livro I de seus *Principia*. Newton mostra que ambos os campos dão origem a uma órbita elíptica com a diferença de que, no primeiro caso, a força é direcionada para o centro geométrico da elipse e, no segundo caso, a força é dirigida para um dos focos.” (SANTOS, F. C.; SOARES, V.; TORT, A. C., 2018, p. 1-2, tradução nossa)².

A partir dessa declaração, pode-se associar (no mínimo, matematicamente) os dois fenômenos mencionados para melhor compreendê-los por comparação. Recorde de uma afirmação já citada de FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.;

² “In 1873, Joseph Louis François Bertrand (1822 – 1900) published a short but important paper in which he proved that there are two central fields only for which all bounded orbits are closed, namely, the isotropic harmonic oscillator law and Newton’s universal gravitation law, that Bertrand calls ‘la loi de la nature’ (the law of nature). Because of this additional symmetry it is no wonder that the most essential properties of these two fields were studied by Newton himself who discusses them in the Proposition X and in the Proposition XI of Book I of his *Principia*. Newton shows that both fields give rise to an elliptical orbit with the difference that in the first case the force is directed towards the geometrical centre of the ellipse and in the second case the force is directed to one of the foci.” (SANTOS, F. C.; SOARES, V.; TORT, A. C., 2018, Pages 1-2).

SANDS, M. (1963, v. I, cap. 21): “Portanto, o estudo de um fenômeno em um campo pode permitir uma extensão de nosso conhecimento em outro campo.”³.

No conteúdo aprendido em oscilações, é notória a equivalência entre o movimento harmônico simples (MHS) – que nada mais é que o caso unidimensional do movimento harmônico radial ou isotrópico – e o movimento circular uniforme (MCU). Considerando que a circunferência é um caso especial da elipse (quando sua excentricidade é nula), este conceito pode ser desenvolvido para um caso generalizado, o da própria elipse, que, por sua vez, está intrinsecamente associada aos movimentos dos astros pelas Leis de Kepler e pela Lei da Gravitação Universal. Ademais, como se modificou a seção cônica analisada, faz-se necessário substituir o oscilador harmônico simples em uma dimensão associado à circunferência por um oscilador harmônico radial ou isotrópico bidimensional – ou seja, uma superposição de dois movimentos harmônicos simples em direções perpendiculares – para uma correta descrição do caso elíptico.

PHOOKUN, B. (2003, p. 83) permite um vislumbre dessa possibilidade:

“Eu gosto de fazer a meus alunos de graduação a seguinte pergunta: Considere um planeta em uma órbita perfeitamente circular ao redor do Sol. Agora, pegue um martelo celestial e dê uma leve batida radial. O que acontece? A resposta, claro, é que o planeta oscila radialmente à medida que circunda o Sol. A oscilação radial combina com o movimento circular para dar uma órbita planetária plausível. Desde que a excentricidade do orbital seja pequena, o movimento radial é harmônico e determinar a órbita é mais simples do que resolver o problema geral das órbitas planetárias. Esta abordagem é talvez mais perspicaz: ela nos permite entender intuitivamente por que uma órbita planetária é fechada e por que é estável e, com um pouco de generalização, determinar o efeito em uma órbita planetária do achatamento do Sol e das correções devido à teoria geral da relatividade.” (PHOOKUN, B., 2003, p. 83, tradução nossa)⁴.

Por último, se tal correspondência é plausível de ser realizada, o derradeiro mecanismo pode ser observado por meio das Curvas de Lissajous – um gráfico em

³ “So the study of a phenomenon in one field may permit an extension of our knowledge in another field.” (FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M., 1963, Volume I, Chapter 21 – The Harmonic Oscillator).

⁴ “I like to ask my undergraduate students the following question: Consider a planet in a perfectly circular orbit round the Sun. Now take a celestial hammer and give it a slight radial knock. What happens? The answer, of course, is that the planet oscillates radially as it goes around the Sun. Radial oscillations combines with circular motion to give a plausible planetary orbit. So long as the eccentricity of the orbital is small, the radial motion is harmonic and determining the orbit is simpler than solving the general problem of planetary orbits. This approach is perhaps more insightful: it allows us to understand intuitively why a planetary orbit is closed, and why it is stable, and, with a little generalization, to determine the effect on a planetary orbit of the oblateness of the Sun and of corrections due to the general theory of relativity.” (PHOOKUN, B.; 2003, Page 83).

duas dimensões, proposto por Nathaniel Bowditch (1773 – 1838) e Jules Antoine Lissajous (1822 – 1880), que descreve movimentos harmônicos complexos –, já que um ajuste de suas equações paramétricas permite confirmar os formatos elípticos gerados pelos movimentos oscilatórios quando aplicados à Mecânica Celestial.

2 ANÁLISE DO MOVIMENTO ORBITAL DOS ASTROS E DO OSCILADOR HARMÔNICO ISOTRÓPICO OU RADIAL

Um fato comum aos dois tipos de movimento analisados neste artigo é que ambos são *problemas de força central para dois corpos*, em que “cada um exerce uma força central conservativa sobre o outro, mas não estão sujeitos a qualquer outra força ‘externa’” (TAYLOR, J. R., 2013, p. 293).

Uma força central é “uma força que em qualquer ponto é sempre direcionada no sentido para dentro ou para fora de um ‘centro de força’ fixo”. (TAYLOR, J. R., 2013, p. 133). “Se considerarmos o centro de força como sendo a origem, uma força central tem a forma (3), onde a função $f(\vec{r})$ fornece a magnitude da força (e é positiva se a força é para dentro e negativa se a mesma é para fora).” (TAYLOR, J. R., 2013, p. 133).

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r})\hat{r} \quad (3)$$

Para o caso gravitacional, a força central é descrita pela Lei da Gravitação Universal de Newton (4), enquanto a força central do oscilador harmônico isotrópico ou radial é expressa por uma generalização da Lei de Hooke (5). As equações (4) e (5) também informam os respectivos potenciais de cada uma dessas forças. Por simplificação dos cálculos (algo que será muito útil mais adiante), adota-se $\mu = GM$ na equação (4), em que μ é o chamado *parâmetro gravitacional padrão* de um corpo celeste, dado pelo produto da constante gravitacional $G = 6,674\ 3015 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2}$ pela massa do corpo central mais massivo M . Além disso, a constante elástica k , que surge na equação (5), é, por definição, igual ao produto da massa do objeto que oscila m pela frequência angular do movimento oscilatório ω_0 : $k \equiv \omega_0^2 m$.

$$\vec{F}_G(r) = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} = -\frac{\mu m}{r^2} \hat{r} \Rightarrow U_G(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{\mu m}{r} \quad (4)$$

$$\vec{F}_{OHR}(r) = -kr \hat{r} = -\omega_0^2 m r \hat{r} \Rightarrow U_G(r) = \frac{1}{2} kr^2 = \frac{1}{2} \omega_0^2 m r^2 \quad (5)$$

“A relação entre movimento circular uniforme (MCU) e movimento harmônico simples (MHS) permite a investigação de um movimento a partir de outro. Por exemplo, um planeta orbitando uma estrela em trajetória aproximadamente circular, pode ser visto como um sistema oscilante, dependendo da posição relativa entre o observador e o plano que contém a órbita do objeto celeste. Podemos estimar parâmetros físicos de interesse, considerando a relação entre MCU e MHS, ainda que não sejam claras as informações da órbita circular por observação direta.” (SILVA, E. S., 2018).

Agora, utilizando o fato de que “o movimento harmônico simples é a projeção do movimento circular uniforme em um diâmetro da circunferência ao longo da qual acontece o movimento circular” (HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J., 2016, p. 100) – reforçado por SILVA, E. S., 2018, na citação anterior –, de maneira que a velocidade angular do MCU ω seja igual à frequência angular do movimento oscilatório ω_0 ($\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, onde T é o período), urge, para continuar a demonstração, designar outra grandeza n , chamada de *movimento médio*, que informa a velocidade angular ω requerida para um corpo completar uma órbita, assumindo velocidade constante em uma órbita circular que se completa ao mesmo tempo que a órbita elíptica de um corpo real com velocidade variável. Assim, o movimento médio é simplesmente uma revolução dividida pelo período orbital P (o período de tempo para o corpo completar uma órbita): $n = \frac{2\pi}{P}$.

Admitindo $T = P$ e, conseqüentemente, $\omega_0 = n = \frac{2\pi}{P}$, podemos fazer essa substituição para o termo ω_0 na equação (5), obtendo a equação (6):

$$\vec{F}_{OHR}(r) = -\frac{4\pi^2}{P^2} m r \hat{r} \Rightarrow U_G(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi^2}{P^2} \right) m r^2 = \frac{2\pi^2}{P^2} m r^2 \quad (6)$$

Então, em virtude da equivalência entre os dois tipos de movimento igualam-se as duas forças ($\vec{F}_G(r) = \vec{F}_{OHR}(r)$), chegando a uma expressão conhecida como Lei Harmônica de Kepler ou Terceira Lei de Kepler do Movimento Planetário (7), que afirma que o quadrado do período orbital dos astros (por exemplo, um planeta)

dividido pelo cubo de sua distância média ao corpo central (no caso do Sistema Solar, o Sol) é igual a uma constante que depende da massa deste corpo central:

$$\vec{F}_G(r) = \vec{F}_{OHR}(r) \Rightarrow -\frac{\mu m}{r^2} \hat{r} = -\frac{4\pi^2 m r}{P^2} \hat{r} \Rightarrow \frac{P^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = \text{constante} \quad (7)$$

Este resultado corrobora a hipótese do autor do presente artigo, pois, para certas condições, os movimentos elíptico variável e harmônico radial/isotrópico se correspondem, tendo em vista que “as leis de Kepler são válidas para órbitas elípticas em geral, não apenas para órbitas circulares.” (BAUER, W.; WESTFALL, G. D.; DIAS, H., 2012, p. 398). Em outras palavras, “elas valem de modo geral para qualquer corpo em órbita ao redor de outro corpo, num referencial em que este último está em repouso e quando a interação entre os corpos é gravitacional” (UFMS – Física, 2020).

2.1 Oscilador harmônico isotrópico/radial e as curvas/figuras de Lissajous

Em física, as oscilações (em especial, as oscilações harmônicas simples e suas superposições em um movimento resultante) são muito úteis e encontradas em inúmeras ocasiões. KNIGHT, R., 2009, explica esse fenômeno em maiores detalhes na citação adiante.

“O *movimento oscilatório* é um movimento repetitivo de um lado para o outro em torno de uma posição de equilíbrio. Movimentos oscilantes e vibrações de todos os tipos são movimentos oscilatórios. Todo movimento oscilatório é *periódico*. (...) Objetos ou sistemas de objetos em movimento oscilatório são chamados de *osciladores*. (...) Um sistema pode oscilar de diversas maneiras, mas estamos particularmente interessados na oscilação *senoidal* suave (...). Essa oscilação, senoidal, o mais básico de todos os movimentos oscilatórios, é chamada de *movimento harmônico simples*, normalmente abreviado por MHS.” (KNIGHT, R., 2009, p. 410-411).

E ainda esclarece as condições para o movimento harmônico simples:

“(...) em certo sentido, resolvemos *todos* os problemas de movimento harmônico simples ao resolvermos o problema da mola horizontal. (...) Uma

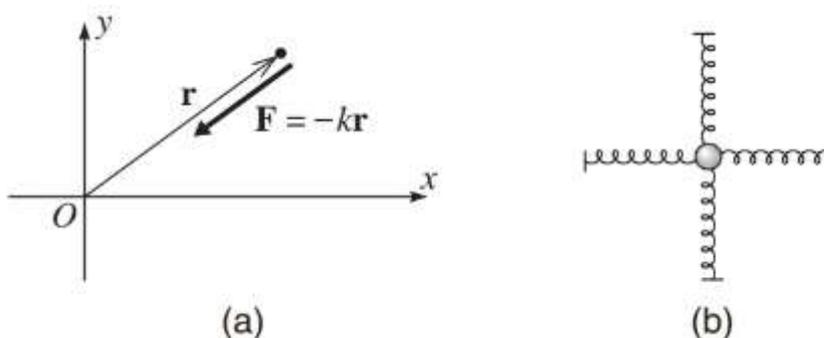
força restauradora que seja diretamente proporcional ao deslocamento a partir da posição de equilíbrio é chamada de *força restauradora linear*. Para qualquer força restauradora linear, a equação de movimento é idêntica à equação da mola (a não ser, talvez, pelo emprego de símbolos diferentes). Consequentemente, *qualquer sistema com força restauradora linear descreverá um movimento harmônico simples em torno da posição de equilíbrio*. É por isso que uma mola em oscilação é o protótipo do MHS. Tudo que aprendemos sobre uma mola oscilando se aplica às oscilações produzidas por qualquer outra força restauradora linear, desde as vibrações das asas de um avião aos movimentos de elétrons em circuitos elétricos.” (KNIGHT, R., 2009, p. 426-427).

Como exemplo, tem-se que “o movimento circular uniforme projetado em uma dimensão é um movimento harmônico simples.” (KNIGHT, R., 2009, p. 414). Além do caso elementar unidimensional do *oscilador harmônico simples*, existe também o *oscilador harmônico isotrópico ou radial* para oscilações em duas ou três dimensões, descrito por TAYLOR, J. R., 2013, na citação adiante:

“Em duas ou três dimensões, as possibilidades para oscilações são consideravelmente mais ricas do que em uma. A situação mais simples é o chamado *oscilador harmônico isotrópico*, para o qual a força de restauração é proporcional ao deslocamento a partir da posição de equilíbrio, com a mesma constante de proporcionalidade em todas as direções.” (TAYLOR, J. R., 2013, p. 170).

Neste tipo de oscilador harmônico, a força central atua na direção da posição de equilíbrio, que pode ser considerada como sendo a origem, como mostrado na Figura 1, que considera uma partícula de massa m com a força (8) atuando sobre ela em duas dimensões.

Figura 1 – Esboço do Oscilador Harmônico Isotrópico / Radial Bidimensional



- (a) Uma força de restauração que é proporcional a r (\vec{r}) define um oscilador harmônico isotrópico. (b) A massa no centro desse arranjo de molas experimentará uma força resultante da forma $\vec{F} = -k\vec{r}$ à medida que ela se move no plano das quatro molas.

Fonte da figura e da legenda que a segue: TAYLOR, J. R., 2013, p. 170 (Adaptado).

$$\vec{F} = -k\vec{r} = -k(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) \quad (8)$$

Para essa situação, a equação de movimento $\ddot{\vec{r}} = \vec{F}/m$ é expressa em termos de duas equações independentes (9), em que $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ é a frequência angular do movimento oscilatório, que é igual para ambas as equações ($\omega_0 = \omega_{0,x} = \omega_{0,y}$).

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_0^2 x \\ \ddot{y} = -\omega_0^2 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = A_x \cos(\omega_0 t - \delta_x) \\ y(t) = A_y \cos(\omega_0 t - \delta_y) \end{cases} \quad (9)$$

Em que as amplitudes A_x e A_y e as constantes de fase δ_x e δ_y são fixadas a partir das condições iniciais do problema analisado. “Redefinindo a origem do tempo, podemos ajustar o fator de fase δ_x , mas, em geral, não podemos ajustar também o fator de fase correspondente na solução para y .” (TAYLOR, J. R., 2013, p. 171). Assim, encontra-se a solução geral exposta de uma maneira mais simples (10):

$$\begin{cases} x(t) = A_x \cos(\omega_0 t) \\ y(t) = A_y \cos(\omega_0 t - \delta) \end{cases} \quad (10)$$

“Onde $\delta = \delta_y - \delta_x$ é a fase *relativa* entre as oscilações de y e x .” (TAYLOR, J. R., 2013, p. 171). O sistema de equações paramétricas (10) resulta em um gráfico que descreve um *movimento harmônico complexo* através de uma família de curvas, chamadas de *curvas ou figuras de Lissajous*. Segundo FLEMMING, J., HORNES, A. (2013, p. 1, tradução nossa), “as figuras de Lissajous são formadas quando duas vibrações harmônicas simples são acopladas em ângulo reto entre si”⁵. MERINO, J. C. (2003, p. 122) e PRADO, C. A. (2017, p. 24-25) também descrevem essas curvas em maiores detalhes em suas citações abaixo.

“Uma figura de Lissajous é a trajetória de um ponto móvel cujas coordenadas retangulares são movimentos harmônicos simples. A equação de um movimento harmônico simples é $x = a \cos(\omega t + \varphi)$, onde t é o tempo e as constantes a , ω e φ são a amplitude, a frequência (angular) e a fase, respectivamente. Equações paramétricas para figuras de Lissajous são,

⁵ “Lissajous figures are formed when two simple harmonic vibrations are coupled at right angle to each other.” (FLEMMING, J.; HORNES, A., 2013, Page 1).

portanto: $x = a \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ e $y = b \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$. As constantes a e b determinam o tamanho da curva, enquanto seu formato depende da relação das frequências (angulares). Se as frequências (angulares) são iguais, a curva é uma elipse ou um segmento de linha, o último ocorrendo se a diferença das fases for um múltiplo de π . Esta propriedade pode ser usada para estudar um sinal desconhecido. Se aplicarmos o sinal desconhecido ao eixo vertical de um osciloscópio e, em seguida, variarmos a frequência (angular) horizontal, quando o osciloscópio mostra uma elipse, a frequência (angular) do sinal foi determinada.” (MERINO, J. C., 2003, p. 122, tradução nossa)⁶.

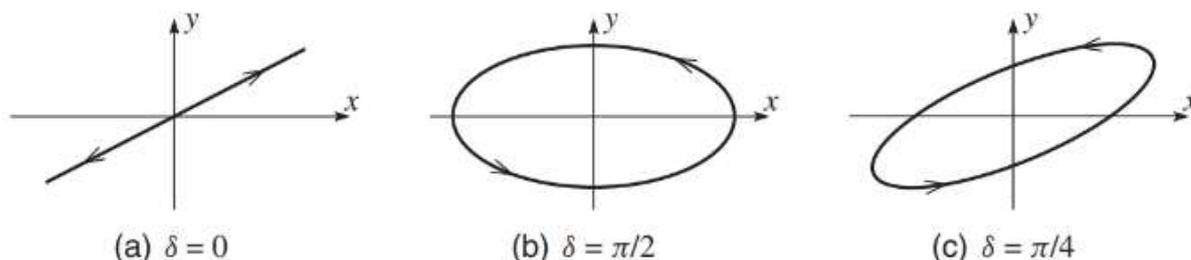
“O estudo de movimentos periódicos pode ser abordado por meio do estudo de funções harmônicas planas ou esféricas. As soluções e descritas dos movimentos vibracionais, oscilatórios e ondulatórios, podem ser obtidos pela expansão em séries de Fourier que basicamente empregam funções seno e cosseno. Soluções de movimentos rotacionais periódicos, não necessariamente circulares, podem ser apresentados de forma parametrizada utilizando duas, ou três, funções senoidais em cada componente do movimento. Um estudo que traz à tona a dependência entre as amplitudes, frequências e fases relativas destas funções senoidais foi feito por meio de uma família de curvas parametrizadas que foi estudada por Nathaniel Bowditch em 1815 e, mais tarde, por Jules Antoine Lissajous em 1857. Estas curvas são denominadas curvas de Lissajous ou curvas de Bowditch e são uma abordagem pertinente ao estudo de parametrizações de outras curvas com grau de liberdade menores, como um segmento de parábola ou polinômio de grau maior.” (PRADO, C. A., 2017, p. 24-25).

2.2 O caso elíptico das curvas/figuras de Lissajous e a associação do oscilador harmônico isotrópico/radial com o movimento orbital dos astros

A elipse, curva cônica importante para a nossa demonstração, aparece nas figuras de Lissajous quando o oscilador harmônico isotrópico (cuja frequência angular é igual para x e y : $\omega_0 = \omega_{0,x} = \omega_{0,y}$) apresenta fase relativa $\delta \neq 0$, como explicado por TAYLOR, J. R., 2013:

⁶ “A Lissajous figure is the trajectory of a moving point whose rectangular coordinates are simple harmonic motions. The equation of a simple harmonic motion is $x = a \cos(\omega t + \varphi)$ where t is the time and the constants a , ω , and φ are the amplitude, the frequency, and the phase respectively. Parametric equations for Lissajous figures thus are $x = a \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$; $y = b \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$. The constants a and b determine the size of the curve while its shape depends on the ratio of the frequencies. If the frequencies are equal, the curve is either an ellipse or a line segment, the latter occurring if the difference of the phases is a multiple of π . This property can be used to study an unknown signal. If we apply the unknown signal to the vertical axis of an oscilloscope and then vary the horizontal frequency, when the oscilloscope shows an ellipse the signal’s frequency has been determined.” (MERINO, J. C., 2003, Page 122).

Figura 2 – Exemplos de Curvas de Lissajous para o Oscilador Harmônico Isotrópico Bidimensional



Movimento de um oscilador bidimensional isotrópico ou radial de acordo com (10). (a) Se $\delta = 0$, então x e y executam um movimento harmônico simples em sintonia e o ponto (x, y) se move para frente e para trás ao longo de uma linha inclinada, conforme ilustrado. (b) Se $\delta = \pi/2$, então (x, y) se movem em torno de uma elipse com eixos ao longo dos eixos x e y . (c) Em geral (por exemplo, $\delta = \pi/4$), o ponto (x, y) se move em torno de uma elipse inclinada, conforme ilustrado.

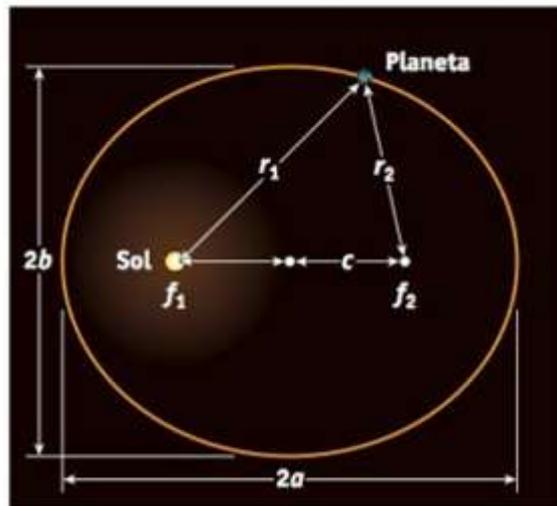
Fonte da figura e da legenda que a segue: TAYLOR, J. R., 2013, p. 171 (Adaptado).

“O comportamento da solução (10) depende dos valores das três constantes A_x , A_y e δ . Se A_x ou A_y for zero, a partícula executa um movimento harmônico simples ao longo de um dos eixos. (A bola na tigela rola para frente e para trás passando pela origem, movendo-se apenas na direção x ou y). Se A_x e A_y não forem zero, o movimento depende criticamente da fase relativa δ . Se $\delta = 0$, então $x(t)$ e $y(t)$ crescem e entram em sintonia, e o ponto (x, y) se move para frente e para trás sobre a linha inclinada que liga (A_x, A_y) a $(-A_x, -A_y)$, conforme está ilustrado na Figura 2(a). Se $\delta = \pi/2$, então x e y oscilam fora de sintonia, com x em um extremo quando y for zero e vice-versa; o ponto (x, y) descreve uma elipse com eixo maior A_x e eixo menor A_y , como na Figura 2(b). Para outros valores de δ , o ponto (x, y) se move em torno de uma elipse inclinada, conforme ilustra o caso para $\delta = \pi/4$ na Figura 2(c).” (TAYLOR, J. R., 2013, p. 171, Adaptado).

Para facilitar os próximos cálculos, consideraremos apenas a elipse centrada na origem O do plano cartesiano, formada pelo movimento de um oscilador harmônico isotrópico ou radial bidimensional quando $\delta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$, mostrada em (15). Recorde que “Newton mostra que ambos os campos dão origem a uma órbita elíptica com a diferença de que, no primeiro caso, a força é direcionada para o centro geométrico da elipse e, no segundo caso, a força é dirigida para um dos focos.” (SANTOS, F. C.; SOARES, V.; TORT, A. C., 2018, p. 1-2). Logo, para se realizar a comparação do movimento orbital com o oscilador harmônico isotrópico ou radial, em duas dimensões, deve-se fazer a descrição de ambos em termos do centro geométrico de uma elipse, preferencialmente centrada na origem O .

Pode-se verificar, pela própria definição desta cônica, que, em tal situação, a curva de Lissajous será uma elipse, como explicado por BAUER, W.; WESTFALL, G. D.; DIAS, H. (2012, p. 396) em sua citação:

Figura 3 – Elipse de uma órbita planetária com os seus parâmetros de descrição.



Fonte: BAUER, W.; WESTFALL, G. D.; DIAS, H. (2012, p. 396).

“Uma *elipse* é uma curva fechada em um plano bidimensional. Tem dois pontos focais, f_1 e f_2 , separados por uma distância $2c$ (Figura 3). Para cada ponto sobre a elipse, a soma das distâncias aos dois pontos focais é uma constante: $r_1 + r_2 = 2a$. O comprimento a é chamado de semieixo maior da elipse. (Note: infelizmente, a notação padrão para semieixo maior de uma elipse usa a mesma letra a , como é convencionalmente usada para simbolizar aceleração. Você deve ser cuidadoso para evitar confusão.) O semieixo menor, b , está relacionado a a e a c por $b^2 \equiv a^2 - c^2$. (...) É útil introduzir a excentricidade, e , de uma elipse, definida como $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$. Uma excentricidade zero, o menor valor possível, caracteriza um círculo. A elipse mostrada na Figura 3 tem excentricidade 0,6.” (BAUER, W.; WESTFALL, G. D.; DIAS, H., 2012, p. 396).

“Em termos de coordenadas cartesianas x e y , os pontos sobre a elipse satisfazem a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde a origem do sistema coordenado está no centro da elipse. Se $a = b$, resulta um círculo (um caso especial de elipse).” (BAUER, W.; WESTFALL, G. D.; DIAS, H., 2012, p. 396). Fazendo a substituição dos termos x^2 e y^2 da equação da elipse com centro na origem O pelos termos $x(t)$ e $y(t)$ da equação (10) elevados ao quadrado e considerando $A_x = a$ e $A_y = b$ (ou seja, levando em conta que a amplitude do MHS no eixo x é igual ao semieixo maior da elipse e a amplitude do MHS no eixo y igual ao semieixo menor), obtém-se (14):

$$\frac{A_x^2}{a^2} \cos^2(\omega_0 t) + \frac{A_y^2}{b^2} \cos^2(\omega_0 t - \delta) = 1 \Rightarrow \cos^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t - \delta) = 1 \quad (11)$$

$$\cos^2(\omega_0 t) = 1 - \cos^2(\omega_0 t - \delta) \Rightarrow \cos^2(\omega_0 t) = 1 - [1 - \sin^2(\omega_0 t - \delta)] \quad (12)$$

$$\cos^2(\omega_0 t) = -\sin^2(\omega_0 t - \delta) \Rightarrow \sqrt{\cos^2(\omega_0 t)} = \sqrt{\sin^2(\delta - \omega_0 t)} \quad (13)$$

$$\cos(\omega_0 t) = \sin(\delta - \omega_0 t) \quad (14)$$

Conclui-se que a única forma de a igualdade (14) ser válida é se a fase relativa for $\delta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$, pois $\cos(\omega_0 t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega_0 t\right) \Rightarrow \cos(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t)$, como se queria demonstrar. Assim, a equação (10) se transforma em (15):

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(\omega_0 t) \\ y(t) = b \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = a \cos(\omega_0 t) \\ y(t) = b \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega_0 t\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = a \cos(\omega_0 t) \\ y(t) = b \sin(\omega_0 t) \end{cases} \quad (15)$$

Assumindo $b = a\sqrt{1 - e^2}$ (visto que $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - a^2 e^2 = a^2(1 - e^2) \Rightarrow b = a\sqrt{1 - e^2}$) e lembrando, como feito anteriormente, que, para $T = P$ (período de oscilação T igual ao período orbital P), $\omega_0 = n = \frac{2\pi}{P}$ (frequência angular ω_0 do movimento oscilatório igual ao movimento médio do corpo celeste n), tem-se (16):

$$\mathcal{E}: \begin{cases} x(t) = a \cos(nt) \\ y(t) = a\sqrt{1 - e^2} \sin(nt) \end{cases} \Rightarrow \mathcal{E}: \begin{cases} x(t) = a \cos\left(\frac{2\pi}{P} t\right) \\ y(t) = a\sqrt{1 - e^2} \sin\left(\frac{2\pi}{P} t\right) \end{cases} \quad (16)$$

A partir da Lei Harmônica de Kepler (7), admitindo r (a distância média do astro ao corpo central do movimento gravitacional) como sendo igual a a (o semieixo maior da elipse), encontra-se (17):

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} \Rightarrow a^3 = \frac{\mu}{4\pi^2} P^2 \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{\mu P^2}{4\pi^2}} \quad (17)$$

Por fim, substituindo o termo (17) na expressão (16), atingem-se as equações paramétricas da elipse \mathcal{E} que associam os dois tipos de movimento (18):

$$\varepsilon: \begin{cases} x(t) = \sqrt[3]{\frac{\mu P^2}{4\pi^2}} \cos\left(\frac{2\pi}{P} t\right) \\ y(t) = \sqrt[3]{\frac{\mu P^2}{4\pi^2}} \sqrt{1-e^2} \sin\left(\frac{2\pi}{P} t\right) \end{cases} \quad (18)$$

De fato, para se verificar a equação (18), supondo alguns valores de tempo t em termos do período orbital P , descobrem-se, conseqüentemente, quantidades associadas a importantes posições na órbita de um astro (Quadro 1):

Quadro 1 – Atribuição de alguns valores de t para a equação (18).

t	$x(t)$	$y(t)$	Posição do astro na órbita
$t = 0$	$x(0) = \sqrt[3]{\frac{\mu P^2}{4\pi^2}} = a$	$y(0) = 0$	Perigeu (0°)
$t = \frac{1}{4}P$	$x\left(\frac{P}{4}\right) = 0$	$y\left(\frac{P}{4}\right) = \sqrt[3]{\frac{\mu P^2}{4\pi^2}} \sqrt{1-e^2} = b$	Perpendicular Direta (90°)
$t = \frac{1}{2}P$	$x\left(\frac{P}{2}\right) = -\sqrt[3]{\frac{\mu P^2}{4\pi^2}} = -a$	$y\left(\frac{P}{2}\right) = 0$	Apogeu (180°)
$t = \frac{3}{4}P$	$x\left(\frac{3P}{4}\right) = 0$	$y\left(\frac{3P}{4}\right) = -\sqrt[3]{\frac{\mu P^2}{4\pi^2}} \sqrt{1-e^2} = -b$	Perpendicular Inversa (270°)
$t = P$	$x(P) = \sqrt[3]{\frac{\mu P^2}{4\pi^2}} = a$	$y(P) = 0$	Perigeu (360°)

Fonte: Do autor.

2.3 Aplicação dos resultados alcançados a um caso conhecido: a órbita da Terra em torno do Sol

Agora que o resultado final foi encontrado, será feito um teste para um caso particular: a órbita da Terra em torno do Sol, desconsiderando-se as influências gravitacionais dos demais planetas que orbitam a estrela regente do Sistema Solar. Os dados astronômicos utilizados para os cálculos subsequentes foram extraídos do site da NASA (National Aeronautics and Space Administration).

A distância média da Terra ao Sol (o corpo central do sistema gravitacional em que nosso planeta está inserido), representada pelo semieixo maior da elipse a , é igual a $a = 1 \text{ UA} = 149\,597\,870\,700 \text{ m}$, e o parâmetro gravitacional padrão do Sol

(que, no caso do Sistema Solar, também é chamada de constante gravitacional heliocêntrica) é $\mu = 1,327\,124\,400\,180 \times 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$. Baseado nisso e usando (17), o período orbital da Terra em torno do Sol (também conhecido como ano sideral ou período orbital sideral) pode ser encontrado como se segue:

$$a^3 = \frac{\mu}{4\pi^2} P^2 \Rightarrow P^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \Rightarrow P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (19)$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{(149\,597\,870\,700)^3 \text{ m}^3}{1,327\,124\,400\,180 \times 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}}} \Rightarrow P = 31,558\,196\,020 \times 10^6 \text{ s} \quad (20)$$

$$P = 31,558\,196\,020 \times 10^6 \text{ s} \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \frac{1 \text{ dia}}{24 \text{ h}} \Rightarrow P = 365,256\,8984 \text{ dias} \cong 365 \text{ dias } 6 \text{ h} \quad (21)$$

O movimento médio da Terra é calculado pela definição de n :

$$n = \frac{2\pi}{P} = 2\pi \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \Rightarrow n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (22)$$

$$n = \frac{2\pi}{31,558\,196\,020 \times 10^6 \text{ s}} = \sqrt{\frac{1,327\,124\,400\,180 \times 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}}{(149\,597\,870\,700)^3 \text{ m}^3}} \quad (23)$$

$$n = 199,098\,3674 \times 10^{-9} \text{ s}^{-1} = 199,098\,3674 \text{ Hz} \quad (24)$$

Além do mais, a excentricidade orbital da Terra é $e = 0,0167$ e, desse modo, o cálculo do semieixo menor da elipse b é feito da seguinte maneira:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = (149\,597\,870\,700 \text{ m})\sqrt{1 - (0,0167)^2} \Rightarrow b = 149\,577\,008\,600 \text{ m} \quad (25)$$

Valendo-se das informações obtidas em (21), (24) e (25) e inserindo-as em (18), conclui-se que a elipse que descreve o movimento orbital da Terra é (26):

$$\varepsilon: \begin{cases} x(t) = [149\,597\,870\,700 \text{ m}] \cos([199,098\,3674 \times 10^{-9} \text{ s}^{-1}]t) \\ y(t) = [149\,577\,008\,600 \text{ m}] \sin([199,098\,3674 \times 10^{-9} \text{ s}^{-1}]t) \end{cases} \quad (26)$$

Repare que, se calcularmos a posição da Terra para o periélio ($t = 0$ ou $t = P$) e o afélio ($t = P/2$), a distância média da Terra ao Sol encontrada será de $a = 149,597\,870\,700 \times 10^6 \text{ km}$, um valor próximo ao da média aritmética M dos valores reais de periélio ($P_e = 147,092 \times 10^6 \text{ km}$) e afélio ($A_f = 152,099 \times 10^6 \text{ km}$):

$$M = \frac{P_e + A_f}{2} = \frac{(147,092 \times 10^6 + 152,099 \times 10^6) \text{ km}}{2} = 149,595\,500 \times 10^6 \text{ km} \cong a \quad (27)$$

Com base nesse resultado, o erro percentual é de, aproximadamente, 2,68%, o que constitui uma boa aproximação tendo em mente as escalas astronômicas.

3 CONCLUSÃO OU CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde que Newton realizou a unificação entre Céu e Terra, o Mundo Natural é regido por leis que se aplicam a todos os seus domínios, expressas principalmente em linguagem matemática. Partilhando desta mesma ideia e analisando os trabalhos de outros teóricos que abordaram o mesmo assunto, o escritor esta obra buscou fazer a associação bidimensional da mecânica gravitacional das órbitas elípticas dos astros com o movimento de um oscilador harmônico isotrópico ou radial, algo que, como pode ser observado nos itens anteriores, foi atingido em um patamar bastante elementar, visto que o presente artigo apresenta apenas uma noção introdutória e realiza uma análise breve, movida pela curiosidade, a respeito deste amplo tópico, cujo exame profundo demandaria mais que estas poucas páginas podem conter.

4 REFERÊNCIAS

BAUER, W.; WESTFALL; G. D.; DIAS, H. **Física para universitários: mecânica**. Tradução de ABREU, I. D.; NETO, M. A. A., e revisão técnica de DIAS, H. 1 ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **The Feynman Lectures on Physics – Volume I**. California Institute of Technology, 1963. Chapter 21 – The Harmonic Oscillator. Disponível em: <https://www.feynmanlectures.caltech.edu/l_21.html>. Acesso em 21 mar. 2021.

FLEMMING, J.; HORNES, A. **Lissajous-like figures with triangular and square waves**. Departamento de Física, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR, Brasil. Rev. Bras. Ensino Fís., Vol. 35, Nº 3. São Paulo, 2013. Disponível em: <<https://www.scielo.br/pdf/rbef/v35n3/a31v35n3.pdf>>. Acesso em 21 mar. 2021.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física – volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica**. Tradução de BIASI, R. S. de. 10 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

PHOOKUN, B. **Planetary Orbits as Simple Harmonic Motion**. Department of Physics, St. Stephen's College, University Enclave, 2003. Disponível em: <<https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/008/12/0083-0091>>. Acesso em 21 mar. 2021.

KNIGHT, R. **Física 1 – Mecânica Newtoniana, Gravitação, Oscilações e Ondas: uma abordagem estratégica**. Tradução de RICCI, T. F. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009.

MERINO, J. C. **Lissajous Figures and Chebyshev Polynomials**. The College Mathematics Journal, Vol. 34, Nº 2, March 2003. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/07468342.2003.11921995>>. Acesso em 21 mar. 2021.

NASA Science. **Solar System Exploration**. 2021. Disponível em: <<https://solar.system.nasa.gov/>>. Acesso em 21 mar. 2021.

NASA Solar System Dynamics. **Astrodynamic Constants**. 2021. Disponível em: <<https://ssd.jpl.nasa.gov/?constants>>. Acesso em 21 mar. 2021.

NASA Space Science Data Coordinated Archive. **Planetary Fact Sheet – Metric**. 2021. Disponível em: <<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/>>. Acesso em 21 mar. 2021.

PRADO, C. A. **Parametrização de Cônicas e Curvas de Lissajous**: conceitos e possibilidades no ensino com auxílio do Geogebra. 2017. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade do Mato Grosso (UNEMAT), Campus de Sinop.

SANTOS, F. C.; SOARES, V.; TORT, A. C. **An English translation of Bertrand's theorem**. Instituto de Física – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/0704.2396.pdf>>. Acesso em 21 mar. 2021.

SILVA, E. S. **Estudo da relação entre o movimento circular uniforme e o movimento harmônico simples utilizando a videoanálise de uma roda de bicicleta**. Rev. Bras. Ensino Fís., Vol. 40, Nº 2. São Paulo, 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172018000200401&lang=pt>. Acesso em 21 mar. 2021.

TAYLOR, J. R. **Mecânica Clássica**. Tradução e revisão técnica de ROQUE, W. L. 1 ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

UFSM – Física. **Leis de Kepler**. 2020. Disponível em: <<https://www.ufsm.br/cursos/graduacao/santa-maria/fisica/2020/02/20/leis-de-kepler/>>. Acesso em 21 mar. 2021.